Deutsch komplex

Mathematik

zur Studienvorbereitung für Ausländer

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

KARL-MARX-UNIVERSITÄT LEIPZIG · Herder - Institut

Deutsch komplex

Mathematik

Aufbaukurs
zur Studienvorbereitung für Ausländer



VEB Verlag Enzyklopädie Leipzig

Autorenkollektiv: Martin Fiedler, Aribert Jungnik, Werner Möckel, Ernst Schuster
Leitung: Ernst Schuster
Gesamtleitung „Deutsch komplex“: Fritz Kempter



Deutsch komplex : Aufbaukurs zur Studienvorbereitung für Ausländer / Karl-Marx-Univ. Leipzig, Herder-Inst. – Leipzig : Verlag Enzyklopädie
Mathematik. – 4. unveränd. Aufl. – 1989. – 452 S. : graph. Darst. & Vokabelverz. (27 S.)
ISBN 3-324-00046-7
NE: Herder-Institut ⟨Leipzig⟩

ISBN 3-324-00046-7

4., unveränderte Auflage

Verlagslizenz Nr. 434-130/133/89
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
Zeichnungen: Jens Borleis, Leipzig
Einbandgestaltung: Rolf Kunze, Großpösna
LSV 0814
Best.-Nr. 577 044 7
01650

Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch ist ein Teil eines komplexen Sprachlehrgangs, der aus folgenden Teilen besteht:

Deutsch komplex – Allgemeinsprache
Deutsch komplex – Mathematik
Deutsch komplex – Physik
Deutsch komplex – Chemie
Deutsch komplex – Biologie
Deutsch komplex – Gesellschaftswissenschaftlicher Grundkurs

Der komplexe Sprachlehrgang ist in erster Linie für Deutschlernende gedacht, die sich innerhalb und außerhalb der DDR auf ein Studium an einer Universität, Hochschule oder Ingenieurschule vorbereiten und deshalb allgemeinsprachliches und fachsprachliches Wissen und Können brauchen.
Voraussetzung für ein erfolgreiches Lernen mit einem oder mehreren Teilen des komplexen Sprachlehrgangs ist, daß entweder das Lehrbuch „Deutsch intensiv. Grundkurs für Ausländer“, VEB Verlag Enzyklopädie Leipzig oder ein ähnliches Sprachlehrbuch für Anfänger durchgearbeitet wurde.
Die fachsprachlichen Teile sind mit dem allgemeinsprachlichen Teil bezüglich der Grammatik, Lexik und Wortbildung koordiniert. Deshalb empfiehlt sich für den Benutzer eines fachsprachlichen Teils ein etwa paralleles Arbeiten mit dem allgemeinsprachlichen Teil.
Bei entsprechendem Sprachstand des Lernenden kann jeder einzelne Teil des Sprachlehrgangs für sich allein benutzt werden. Der Teil „Mathematik“ ist ein in sich abgeschlossenes Lehrbuch, das geeignet ist, im Zusammenhang mit der Vermittlung mathematischen Wissens und Könnens in die deutsche Fachsprache der Mathematik einzuführen und produktives Sprachvermögen zu entwickeln. Die Texte sind so verfaßt, daß die sprachlichen Anforderungen allmählich ansteigen und fachsystematische Gesichtspunkte berücksichtigt werden.
Die „Übungen und Aufgaben“ zu jedem Text dienen neben der mathematischen Bildung der Festigung der neuen Lexik und der Automatisierung von solchen grammatischen und Wortbildungserscheinungen, die für den wissenschaftlichen Sprachgebrauch wichtig sind. Die durchgängige Gliederung in Text – Kontrollfragen – Aufgaben gewährleistet den Erwerb neuen Wissens, die Kontrolle des Verständnisses und die Anwendung der neuen Kenntnisse in kommunikativen Sprachtätigkeiten.
Ein beigelegtes Vokabelverzeichnis ist in zwei Teile gegliedert, in ein Vokabelverzeichnis zu den Stoffgebieten und in ein alphabetisches Vokabelverzeichnis. Das alphabetische Vokabelverzeichnis kann wie ein Sachwortverzeichnis verwendet werden.
„Deutsch komplex – Mathematik“ wendet sich insbesondere an junge Menschen, die sich intensiv auf ein Studium in einer technisch-naturwissenschaftlichen, medi-

zinischen, landwirtschaftlichen oder wirtschaftswissenschaftlichen Fachrichtung vorbereiten wollen.
Als Benutzer kommen weiterhin ausländische Wissenschaftler, Ingenieure, Lehrer usw. in Betracht, die beispielsweise mathematisch-naturwissenschaftliche Literatur in deutscher Sprache lesen wollen.
Die Autoren wollen an dieser Stelle Gelegenheit nehmen, den Kollegen des Herder-Instituts der Karl-Marx-Universität Leipzig für ihre Mithilfe zu danken. Ihre jahrzehntelangen Erfahrungen und ihre Hinweise, die sie im Ergebnis einer mehrjährigen Unterrichtserprobung der Vorlagen zu diesem Buch machten, wurden berücksichtigt.
Wir wünschen allen Lernenden und Lehrenden, die mit diesem Buch arbeiten werden, viel Erfolg. Für Zuschriften, die über die Arbeit mit dem Buch berichten, für Hinweise und Kritiken wären wir dankbar.

Leipzig 1979 Die Autoren

Hinweise für den Benutzer

Das Lehrbuch gliedert sich in 9 Hauptkapitel. Jedes Hauptkapitel ist in numerierte Texte unterteilt, zu denen jeweils ein Übungsteil gehört, der aus „Kontrollfragen“ und „Aufgaben“ besteht. Die Numerierung der Texte erfolgt über die Hauptkapitel hinweggehend.
Die Potenzen des Lehrbuchs werden am besten genutzt, wenn die Texte in der gegebenen Reihenfolge abgearbeitet werden. Dabei empfiehlt es sich im allgemeinen, zuerst den Text zu lesen, danach das Verständnis des Textes durch Beantwortung der Kontrollfragen zu überprüfen und erst dann die „Übungen und Aufgaben“ zu absolvieren.
Für fachlich und sprachlich gut vorgebildete Leser ist es auch möglich, ein Hauptkapitel oder einen Einzeltext außerhalb der Reihenfolge durchzuarbeiten.
Bei der Gestaltung der ersten vier Hauptkapitel gingen die Autoren davon aus, daß beim Benutzer die Kenntnis des mathematischen Inhalts vorausgesetzt werden kann. Diese Hauptkapitel zielen also vor allem auf die Vermittlung sprachlichen Könnens, die übrigen fünf Hauptkapitel auch auf die Entwicklung mathematischen Könnens.
Neben den mathematischen Symbolen, die sämtlich in den Texten erklärt sind, werden nur zwei Zeichen verwendet:

► Ankündigung der Lösung
... Das vorgegebene oder selbst zu findende Sprachmaterial ist einzusetzen.

Am Rande der Seiten sind mit

▶ wichtige Definitionen und mit
■ wichtige Sätze, Zusammenfassungen, Beispiele, Beweise usw. markiert.

Bedeutung der verwendeten Abkürzungen

N = Nominativ
A = Akkusativ
D = Dativ
G = Genitiv

Inhaltsverzeichnis

Integralrechnung

Lineare Gleichungssysteme

Vektorrechnung

Analytische Geometrie

Begriffe aus der Mengenlehre

1. Mengen

1.1. Endliche und unendliche Mengen

Aus Zahlen kann man Mengen bilden:

■ $M_1 = \{4; 5; 6\}$ $M_2 = \{7; 8; 9; 10\}$ $M_3 = \{4; 5; 6; 7; 8\}$
$M_4 = \{9; 10\}$ $M_5 = \{0; 22; 27\}$ $M_6 = \{7; 8; 9; 10\}$

Die Menge M_1 besteht aus drei Elementen. 4, 5, 6 sind die Elemente der Menge M_1. 4 ist ein Element der Menge M_1. Man schreibt: $4 \in M_1$. Man liest: „4 ist ein Element der Menge M_1“ oder „4 ist ein Element aus M_1“. Die Menge M_1 hat drei Elemente. Das sind endlich viele Elemente. Deshalb heißt die Menge M_1 eine endliche Menge. Auch die Menge M_2 ist eine endliche Menge, weil sie aus endlich vielen Elementen besteht. Die Mengen M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 und M_6 sind endliche Mengen.
Betrachten Sie die Mengen M_2 und M_6! Sie sind gleich, weil sie aus den gleichen Elementen bestehen.

► Zwei Mengen sind gleich, wenn sie aus den gleichen Elementen bestehen.

Alle Elemente der Mengen M_1 bis M_6 sind natürliche Zahlen.

■ Die Menge $N = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$ heißt die Menge der natürlichen Zahlen. Die Menge N ist keine endliche, sondern eine unendliche Menge, weil sie aus unendlich vielen Elementen besteht.

1.2. Mengen und Teilmengen

Die Menge M_1 ist eine Teilmenge der Menge N. Man schreibt: $M_1 \subseteq N$. Man liest: „M_1 ist eine Teilmenge von N“.
Die endliche Menge M_1 ist eine Teilmenge der unendlichen Menge N. Für die Mengen M_1, M_2, M_3 und M_4 gilt:
$M_1 \subseteq M_3$ und $M_4 \subseteq M_2$.
Unter welcher Bedingung ist eine Menge A eine Teilmenge der Menge B?

► Eine Menge A ist eine Teilmenge der Menge B, wenn alle Elemente aus A auch Elemente von B sind.

Man kann diesen Satz auch folgendermaßen formulieren: Wenn für alle Elemente x aus A gilt, daß x Element aus B ist, so ist A eine Teilmenge von B. Diesen Satz kann man mit Hilfe von Symbolen schreiben:

■ Für Konditionalsätze der Form „Wenn H_1, so H_2" benutzt man das Symbol „$H_1 \rightarrow H_2$".
Für den sprachlichen Ausdruck „Für alle Elemente x aus A gilt, daß ..." benutzt man das Symbol „$\forall x \in A: ...$".

Der obige Satz erhält nun folgende Form:

$$(\forall x \in A : x \in B) \rightarrow A \subseteq B.$$

Betrachten Sie die Mengen M_3 und M_4! Ist M_4 eine Teilmenge von M_3? Nein, M_4 ist keine Teilmenge von M_3, denn nicht für alle Elemente x aus M_4 gilt, daß x aus M_3 ist. Man schreibt: $M_4 \nsubseteq M_3$ und $\sim \forall x \in M_4 : x \in M_3$. Zum Beispiel ist $9 \in M_4$, aber 9 ist kein Element aus M_3. Man schreibt: $9 \notin M_3$. Gibt es auch unendliche Teilmengen der Menge N? Ja, z. B. sind $N_g = \{0; 2; 4; 6; ...; 2n; ...\}$ und $N_u = \{1; 3; 5; ...; 2n + 1; ...\}$ unendliche Teilmengen der Menge N. Die Zahl $2n$ ist für alle $n \in N$ eine gerade Zahl. ($\forall n \in N : 2n \in N_g$). Entsprechend ist $2n + 1$ eine ungerade Zahl.

■ Die Menge N_g der geraden Zahlen und die Menge N_u der ungeraden Zahlen sind unendliche Teilmengen der Menge N.

Betrachten Sie die Mengen M_2 und M_6! Ist M_2 eine Teilmenge der Menge M_6? Ja, denn für alle Elemente x aus M_2 gilt, daß x aus M_6 ist. $\forall x \in M_2 : x \in M_6$; also $M_2 \subseteq M_6$.
Weil $M_2 = M_6$ ist, folgt $M_2 \subseteq M_6$ und $M_6 \subseteq M_2$.

Allgemein gilt:

▶ Für jede Menge A gilt, daß A Teilmenge von A ist.
$\forall A : A \subseteq A$.

Betrachten Sie nun die Mengen M_4 und M_2! Die Menge M_4 heißt **echte** Teilmenge der Menge M_2. Man schreibt: $M_4 \subset M_2$. Man liest: M_4 ist eine echte Teilmenge von M_2.
$M_4 \subset M_2$, weil $M_4 \subseteq M_2$ ist und weil es das Element 7 aus M_2 gibt, so daß $7 \notin M_4$ ist.

Allgemein gilt:

▶ Wenn A eine Teilmenge von B ist und wenn es mindestens ein Element x aus B gibt, so daß x kein Element aus A ist, ist A eine echte Teilmenge von B.

Für den sprachlichen Ausdruck „Es gibt mindestens ein Element x aus A, so daß ..." benutzt man das Symbol „$\exists x \in A: ...$". Außerdem benutzt man für „und" das Symbol „$\wedge$". Deshalb kann man kürzer schreiben:

$$(A \subseteq B \wedge \exists x \in B : x \notin A) \rightarrow A \subset B.$$

Weitere Beispiele für echte Teilmengen sind:

$$M_1 \subset M_3 \text{ und } M_4 \subset M_6.$$

1.3. Operationen mit Mengen

Man kann aus den Mengen M_2 und M_3 eine neue Menge bilden, die Vereinigungsmenge von M_2 und M_3. Man schreibt dafür: $M_2 \cup M_3$.

$$M_2 \cup M_3 = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$$

Allgemein gilt:

▶ Die Vereinigungsmenge der Mengen A und B besteht aus allen Elementen, die Element von A oder Element von B sind.

Man benutzt für „oder" das Symbol „$\vee$". Deshalb kann man kürzer schreiben: $\forall x \in A \cup B : x \in A \vee x \in B$.
Diesen Zusammenhang kann man graphisch durch drei Mengendiagramme darstellen:

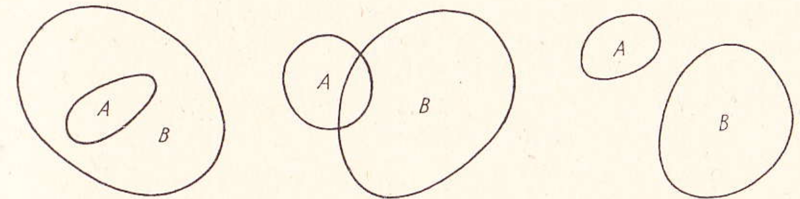


Abb. 1.1. Vereinigungsmenge zweier Mengen

Man erkennt am 2. Mengendiagramm die mathematische Bedeutung des Wortes „oder".
„$x \in A$ oder $x \in B$" ist wahr für:

1. $x \in A$ und $x \notin B$
2. $x \notin A$ und $x \in B$
3. $x \in A$ und $x \in B$

Allgemein gilt:

■ „H_1 oder H_2" ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist.

Beachten Sie besonders, daß „H_1 oder H_2" auch wahr ist, wenn H_1 wahr ist und wenn H_2 wahr ist.
Man kann auch nach den gemeinsamen Elementen von M_2 und M_3 fragen. Diese Elemente bilden auch eine Menge. Es ist die Durchschnittsmenge der Mengen M_2 und M_3. Man schreibt dafür $M_2 \cap M_3 = \{7; 8\}$.

Allgemein gilt:

► Die Durchschnittsmenge von A und B besteht aus allen Elementen, die Element von A und Element von B sind.

Mit anderen Worten: Wenn $x \in A \cap B$, so ist $x \in A$ und $x \in B$.

$\forall x \in A \cap B : x \in A \wedge x \in B.$

Betrachten Sie die Mengen M_4 und M_5! Die Durchschnittsmenge von M_4 und M_5 ist eine Menge, die aus keinem Element besteht. Diese Menge heißt die leere Menge. Man benutzt für sie das Symbol „$\emptyset$".

Allgemein gilt:

■ Die leere Menge ist eine Teilmenge von jeder Menge A.
$\forall A : \emptyset \subseteq A.$

Beachten Sie: $\{0\} \neq \emptyset$.
Jede Menge A hat also mindestens zwei Teilmengen: die Menge A selbst und die leere Menge. Diese beiden Mengen nennt man auch die *trivialen* Teilmengen der Menge A.
Man kann noch die Differenzmenge von zwei Mengen A und B bilden. Man schreibt dafür: $A \setminus B$. Man liest: „Die Differenzmenge von A und B".

► Die Differenzmenge $A \setminus B$ besteht aus allen Elementen, die Element von A und kein Element von B sind.

$x \in A \setminus B \rightarrow x \in A \wedge x \notin B.$
$\forall x \in A \setminus B : x \in A \wedge x \notin B.$

Beispiele:

$M_3 \setminus M_1 = \{7; 8\}; \quad M_1 \setminus M_4 = \{4; 5; 6\}; \quad M_4 \setminus M_2 = \emptyset.$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wieviel Elemente hat die Menge $B = \{6; 7; 8; 9\}$?
2. Aus wieviel Elementen besteht die Menge B?
3. Warum ist $D = \{8; 9; 10\}$ eine endliche Menge?
4. Unter welcher Bedingung sind zwei Mengen gleich?
5. Was für eine Menge ist die Menge der natürlichen Zahlen?
6. Was für Zahlen sind die Elemente der Mengen B und D?
7. Unter welcher Bedingung ist die Menge G eine Teilmenge der Menge H?
8. Kann eine unendliche Menge eine unendliche Teilmenge haben?
9. Kann eine endliche Menge eine unendliche Teilmenge haben?
10. Wie liest man den Ausdruck $X \rightarrow Y$?

11. Wie liest man „$\forall x \in R$: ..." und „$\sim \forall x \in R$: ..."?
12. Was für Zahlen sind $2n$ und $2n + 1$, wenn $n \in N$ ist?
13. Unter welcher Bedingung ist die Menge G eine *echte* Teilmenge der Menge H?
14. Wie liest man „$\exists x \in R$: ..." und „$\sim \exists x \in R$: ..."?
15. Wie ist die Vereinigungsmenge $K \cup P$ der Mengen K und P erklärt?
16. Unter welchen 3 Bedingungen ist „$x \in A \vee x \in B$" wahr?
17. Wie ist die Durchschnittsmenge $M \cap N$ der Mengen M und N erklärt?
18. Was versteht man unter der leeren Menge?
19. Welche trivialen Teilmengen hat jede Menge M?
20. Aus welchen Elementen besteht die Differenzmenge $M \setminus N$ der Mengen M und N?
21. Wie liest man „$K \subseteq R \rightarrow K \setminus R = \emptyset$"?

Aufgaben

1. Element und Menge

1.1. Lesen Sie!

$a \in N$ und $b, c \notin M$
► a ist ein Element aus N, und b und c sind keine Elemente aus M.

$r \in N$ und $p, q \notin N$
$a, b, c \notin N$, aber $s \in N$
$m, n \in N$ und $p, q \in M$
$r \notin R$ und $t \in T$

1.2. Wir haben die Mengen $C = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ und $F = \{7; 8; 9; 10\}$. Was können Sie über die natürlichen Zahlen 4, 5, 7, 9, 6, 8, 10, 3 sagen?
► $4 \in C$, aber $4 \notin F$.

2. Lesen Sie!

$A = \{2; 3; 4\}$
► Menge A gleich Menge der Elemente 2, 3, 4.

$B = \{1; 7; 12; 20\}$
$C = \{x; y; z\}$
$D = \{4; 5; 6; 7\}$

3. endlich viele – unendlich viele

Geben Sie zwei Antworten!

$N = \{0; 1; 2; 3; ...; n; ...\}$
► Die Menge N hat unendlich viele Elemente.
► Die Menge N besteht aus unendlich vielen Elementen.

$N_u = \{1; 3; 5; ...; 2n + 1; ...\}$
$R = \{1; 4; 9\}$
$Q = \{1; 4; 9; ...; n^2; ...\}$ (n^2, lies: n hoch 2)
$T = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

4. für alle ...

4.1. Lesen Sie!

$\forall x \in N_g : x \in N$

► Für alle Elemente x aus N_g gilt, daß x ein Element aus N ist.

$\forall x \in N_u : x \in N$
$\forall x \in N_u : x \notin N_g$
$\forall g \in N_u : (g \notin N_g \wedge g \in N)$
$\sim \forall x \in N : x \in N_u$
$\sim \forall x \in N : x \in N_g$

4.2. für jede(n,s) ...

Lesen Sie!

$\forall x \in N_g : x \in N$

► Für jedes Element x aus N_g gilt, daß x ein Element aus N ist.

Verwenden Sie die gleichen Beispiele wie in Übung 4.1.!

4.3. Stellen Sie die Aussagen aus 4.1. in Mengendiagrammen dar!

5. Wenn ..., so ...

Lesen Sie!

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$

► Wenn A eine Teilmenge von B **ist** und wenn B eine Teilmenge von C **ist**, so **ist** A eine Teilmenge von C.

$(x \in G \wedge G \subseteq K) \rightarrow x \in K$
$(x \in K \wedge x \notin S) \rightarrow (x \notin K \cap S)$
$(x \in A \cup B) \rightarrow (x \in A \vee x \in B)$
$K \subseteq R \rightarrow (\forall x \in K : x \in R)$

6. Es gibt mindestens ein ..., so daß ...

Lesen Sie!

$\exists x \in N : x \in N_g$

► Es gibt mindestens ein Element x aus N, so daß x ein Element aus N_g ist.

$\exists x \in N : x \notin N_g$
$\exists t \in N_g : t \in N$
$\sim \exists x \in N_g : x \in N_u$

7. Suchen Sie im Text alle zusammengesetzten Substantive mit dem Grundwort „Menge"!

8. Teilmenge – echte Teilmenge

Vergleichen Sie die beiden Mengen!

$A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{1; 2; 3\}$

► Die Menge B ist eine echte Teilmenge der Menge A.
$B \subset A$

1. $P = \{0; 1\}$ $Q = \{1\}$
2. $M = \{1; 2\}$ $N = \{1; 2\}$
3. $R = \{1; 2; 3\}$ $T = \{4; 5; 6\}$
4. $S = \{0\}$ $V = \{0; 1; 2; 3\}$

9. Bilden Sie zu den gegebenen Mengen die Vereinigungsmenge, die Durchschnittsmenge und die Differenzmengen!

$A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{5; 6; 7\}$

► $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ $A \cap B = \emptyset$
$A \setminus B = \{1; 2; 3; 4\}$ $B \setminus A = \{5; 6; 7\}$

1. $M = \{3; 4; 7\}$ $N = \{3; 4; 8\}$
2. $R = \{4; 5; 6\}$ $S = \{4; 5; 6\}$
3. $P = \emptyset$ $T = \{1; 2; 3\}$
4. $K = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ $L = \{3; 4\}$
5. $C = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ $F = \{7; 8; 9; 10\}$
6. Betrachten Sie für die Mengen C und F die Elemente 4, 5, 7 und 9!

► $4 \in C \cup F$, $4 \notin C \cap F$, $4 \in C \setminus F$, $4 \notin F \setminus C$

10. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in Worten, und zeichnen Sie die Mengendiagramme!
Prüfen Sie die Wahrheit der Aussagen!

► $A \cap B = \emptyset \rightarrow \sim \exists x \in A : x \in B$ (wahr)
Wenn die Durchschnittsmenge von A und B die leere Menge ist, so gibt es kein Element x aus A, so daß x ein Element aus B ist. (wahr)

► $(\forall x \in A : x \in B) \rightarrow A \subset B$ (falsch)
Wenn für alle Elemente x aus A gilt, daß x ein Element aus B ist, so ist A eine echte Teilmenge von B. (falsch)

1. $A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$
2. $(\forall x : x \in A \wedge x \in B) \rightarrow A = B$
3. $x \in A \cup B \rightarrow x \in A \vee x \in B$
4. $A \subseteq B \rightarrow A \cap B = \emptyset$
5. $A \cup B = \emptyset \rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$
6. $A \cap B = \emptyset \rightarrow \forall x \in A : x \in B$
7. $A \cup B \neq \emptyset \rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$
8. $A \subset B \rightarrow (\forall x \in A : x \in B \wedge \exists x \in B : x \notin A)$
9. $x \in B \cup A \rightarrow (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \notin B \wedge x \in A)$
10. $A = \emptyset \rightarrow \sim \exists x \in A$
11. $A = B \rightarrow (\forall x \in A : x \in B \wedge \forall x \in B : x \in A)$
12. $A \cup B = B \rightarrow A \cap B = B$
13. $A \subseteq B \rightarrow A \setminus B = A$
14. $A \setminus B = A \rightarrow B = \emptyset$

11. Wenn die Aussagen der Übung 10. falsch sind, korrigieren Sie die rechten Seiten der Aussagen, so daß wahre Aussagen entstehen!

► $(\forall x \in A: x \in B) \rightarrow A \subset B$ (falsch)

$(\forall x \in A: x \in B) \rightarrow A \subseteq B$ (wahr)

12. Die Bedeutung des Wortes „oder" in der Mathematik

$A = \{0; 1; 2; 3\}$ $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

Ist der Ausdruck wahr?

► $1 \in A$ oder $1 \in B$

$1 \in A$ oder $1 \in B$ ist wahr, weil $1 \in A$ ist.

1. $0 \in A$ oder $0 \in B$	6. $0 \notin A$ oder $0 \notin B$
2. $5 \in A$ oder $5 \in B$	7. $5 \notin A$ oder $5 \notin B$
3. $7 \in A$ oder $7 \in B$	8. $7 \notin A$ oder $7 \in B$
4. $2 \in A$ oder $2 \in B$	9. $2 \notin A$ oder $2 \in B$
5. $3 \in A$ oder $3 \in B$	10. $3 \notin A$ oder $3 \notin B$

Begriffe und Sätze aus der Geometrie

2. Grundbegriffe der Geometrie

2.1. Grundfiguren

Die Geometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik. Sie beschäftigt sich mit Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen von Punktmengen:

■ Wir betrachten einige Punktmengen:

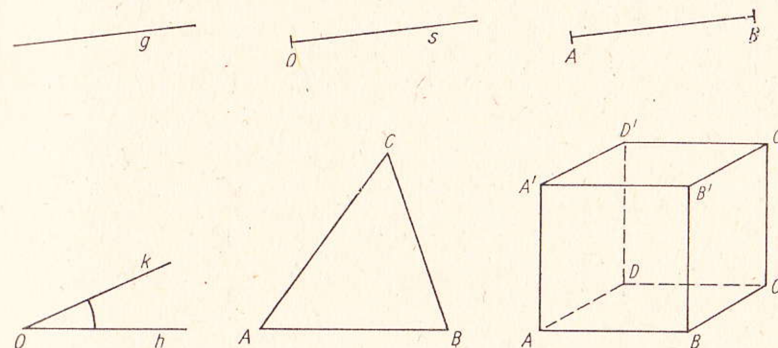


Abb. 2.1. Punktmengen

Diese Punktmengen bezeichnet man als Figuren. Die Geraden, die Strahlen und die Strecken sind lineare Figuren. Winkel und Dreiecke gehören zu den ebenen Figuren.

Der Würfel ist eine räumliche Figur. Die einfachsten Figuren sind ein Punkt P, eine Gerade g und eine Ebene E.

Man bezeichnet Punkt, Gerade und Ebene als Grundfiguren der Geometrie.

2.2. Grundrelationen

Zwischen den Figuren bestehen Relationen (Beziehungen). Wir betrachten z. B. einen Punkt P und eine Gerade g.

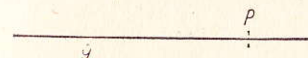


Abb. 2.2. Relation zwischen Punkt und Gerade

Welche Relation besteht zwischen P und g?
Wir stellen fest: $P \in g$
Man sagt in der Sprache der Geometrie:

Der Punkt P **liegt auf** der Geraden g.

Zwischen P und g besteht also die Relation „...liegt auf ...".
Die Relation „... liegt auf ..." gehört zu den Grundrelationen.
In der folgenden Übersicht finden Sie Angaben über die Formulierung von Grundrelationen.

	in Symbolen	in Worten
	$P \in g$ $g \ni P$	***P* liegt auf *g*** ***g* geht durch *P***
	$P \in E$ $E \ni P$	***P* liegt in *E*** ***E* geht durch *P***
	$g \subset E$ $E \supset g$	***g* liegt in *E*** ***E* geht durch *g***
	$P \in AB$	***P* liegt zwischen *A* und *B***
AB ist die Menge aller Punkte zwischen A und B		$(A, B, P \in g)$

Tabelle 2.1. Grundrelationen

Sprachliche Kurzformen:
P auf g; g durch P; P in E; E durch P;
g in E; E durch g; P zwischen A und B

Beachten Sie:
Ein Punkt P ist ein Element einer Geraden g.
Deshalb schreibt man $P \in g$. Eine Gerade ist eine **echte Teilmenge** einer Ebene E.
Deshalb schreibt man $g \subset E$.

► Grundfiguren und Grundrelationen zwischen Figuren sind Grundbegriffe der Geometrie.

Die Grundbegriffe einer Theorie definiert man nicht.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Womit beschäftigt sich die Geometrie?
2. Nennen Sie einige Figuren!
3. Welche Figuren sind Grundfiguren der Geometrie?
4. Aus welchen drei linearen Figuren besteht ein Dreieck ABC?
5. Wie heißen h und k von $\sphericalangle(h, k)$?
6. Wie heißt der Punkt A von $\sphericalangle BAC$?
7. Welche linearen Figuren kennen Sie?
8. Was für Figuren sind Winkel und Dreiecke?
9. Was für eine Figur ist ein Würfel?
10. Welche zwei Arten von Grundbegriffen sind für die Geometrie wichtig?
11. Welche Relation besteht zwischen drei verschiedenen Punkten, die auf einer Geraden liegen?
12. Wie nennt man Relationen, die nicht definiert werden?

Aufgaben

1. bezeichnen *A* als *A*

Beachten Sie den richtigen Gebrauch des bestimmten oder unbestimmten Artikels!

Punkt A des Dreiecks ABC
► Man bezeichnet **den** Punkt A des Dreiecks ABC als **einen** Eckpunkt.

Punkt A der Strecke $\overline{AB}$
Strecke $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC
Punkt B des Winkels $\sphericalangle ABC$
Strahl k des Winkels $\sphericalangle(h, k)$
Strecke $\overline{AB}$ des Würfels mit den Eckpunkten A und B
Punkt A der Kante $\overline{AB}$ eines Würfels

2. Lesen Sie!

$A \in g, h$
► Der Punkt A liegt auf den Geraden g und h.

1. $g \ni P, Q$
2. $g \subset E \wedge g \ni P$
3. $S \in g, h$
4. $ABC \subset E$
5. $\overline{AB} \not\subset g$
6. $C \in AB$
7. $E \supset g \wedge E \ni P$
8. $\sphericalangle(h, k) \subset E$

3. Schreiben Sie die Ausdrücke der Übung 2 in Worten!

4. Schreiben Sie folgende Aussagen mit Hilfe von Symbolen!

1. Der Punkt S liegt auf den Geraden g und h.

Anmerkung: Die Geraden g und h sind verschiedene Geraden. In Zeichen: $g \neq h$

2. Die Gerade g geht durch die Punkte A und C.
3. Die Strecke $\overline{BD}$ liegt auf der Geraden h.
4. Der Punkt S liegt zwischen den Punkten A und C und zwischen den Punkten B und D.
5. Die Strecke $\overline{BC}$ liegt auf dem Viereck $ABCD$.

5. Zeichnen Sie mit Hilfe der Aussagen 4.1. bis 4.5. eine Figur!

6. Für alle Punkte P eines Strahls s mit dem Anfangspunkt A und einem Punkt $B \in s$ mit $B \neq A$ gilt folgende Aussage:

$$P \neq A, B \rightarrow (P \in AB \vee B \in AP)$$

6.1. Formulieren Sie diese Aussage in Worten!

6.2. Veranschaulichen Sie diese Aussage durch eine Zeichnung!

7. Betrachten Sie folgende Zeichnung!

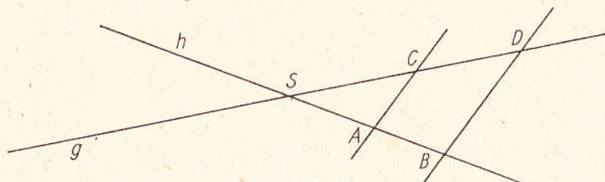


Abb. 2.3.

Welche Relationen bestehen zwischen den angegebenen Figuren? Formulieren Sie die Antwort mit Worten und mit Symbolen!

S, g, h

► Der Punkt S liegt auf den Geraden g und h.

$S \in g, h$

1. S, g	3. h, A, B	5. D, S, C
2. $\overline{SD}, g$	4. $\overline{AD}, ADS$	6. D; SBC

8. Lesen Sie den Text, und beantworten Sie die Fragen zum Text!

Dreieck und Dreiecksfläche

Wir betrachten in einer Ebene E ein Dreieck ABC und zwei verschiedene Punkte P und Q. P liegt auf dem Dreieck ABC, aber Q ist kein Punkt des Dreiecks ABC. Q liegt innerhalb des Dreiecks. Q ist ein innerer Punkt des Dreiecks ABC. Die Menge aller inneren Punkte des Dreiecks bezeichnet man mit (ABC). Die Punktmenge (ABC) heißt das Innere von ABC. Die Vereinigungsmenge von ABC mit seinem Inneren (ABC) bezeichnet man als Dreiecksfläche $\overline{ABC}$.

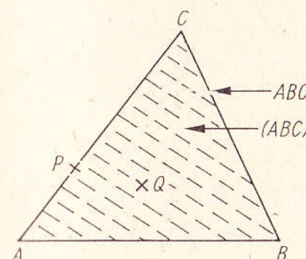


Abb. 2.4.

Man definiert: $\overline{ABC} =_{Df} ABC \cup (ABC)$

Man sagt: Die Dreiecksfläche $\overline{ABC}$ **ist nach Definition** die Vereinigungsmenge von einem Dreieck ABC und seinem Inneren (ABC).

Das Dreieck ABC bezeichnet man als Rand der Dreiecksfläche $\overline{ABC}$. In der gleichen Weise wie beim Dreieck kann man auch für andere Figuren eine Fläche definieren.

Fragen zum Text

1. Was bedeutet $\overline{ABC}$?
2. Was bedeutet (ABC)?
3. Welche Bedeutung hat ABC für $\overline{ABC}$?
4. Wie definiert man $\overline{ABC}$?
5. Wie heißt die folgende Aussage in Worten?

$$\forall P \in \overline{ABC}: P \in ABC \vee P \in (ABC)$$

6. Was erhält man, wenn man die Differenzmenge von $\overline{ABC}$ und (ABC) bildet?
7. Wie nennt man einen Punkt $P \in (ABC)$?
8. Wie definiert man die Fläche eines Vierecks $ABCD$?

(a) Schreiben Sie die Definition als Gleichung!

(b) Formulieren Sie die Definition in Worten!

3. Definitionen von Objekten

3.1. Definitionsarten

Mit Hilfe von Grundbegriffen kann man geometrische Begriffe definieren.

Beispiel:

■ Eine Strecke $\overline{AB}$ ist eine Punktmenge, die aus zwei verschiedenen Punkten A und B und allen Punkten zwischen A und B besteht.

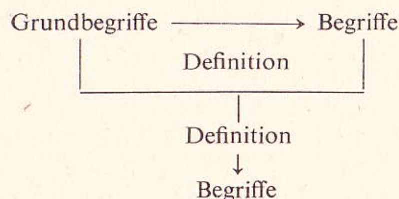
Man definiert geometrische Begriffe auch mit Hilfe von Grundbegriffen und schon definierten Begriffen.

Beispiel:

- Ein Dreieck ABC ist eine Punktmenge, die aus den Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ besteht.
  A, B und C liegen nicht auf einer Geraden.

Allgemein gilt:

- Man definiert mit Hilfe von Grundbegriffen oder mit Grundbegriffen und bereits definierten Begriffen weitere Begriffe.



Deshalb sind Kenntnisse über Definitionen besonders wichtig.
Man definiert Objekte, Relationen zwischen den Objekten und Eigenschaften der Objekte.
Wir können daher folgende Definitionsarten unterscheiden:

1. Definitionen von Objekten
2. Definitionen von Relationen
3. Definitionen von Eigenschaften

3.2. Aufbau und Formulierung der Definitionen von Objekten

Zu den Objekten der Geometrie gehören die Figuren. Wichtige Figuren sind z. B. die Vierecke. Zur Menge der Vierecke gehören die Trapeze.

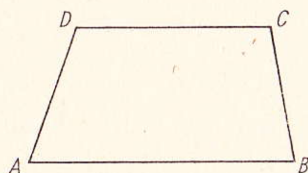


Abb. 3.1. Trapez

Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez. Die Seite $\overline{AB}$ ist parallel zur Seite $\overline{DC}$. In Zeichen: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

Den Aufbau und die sprachliche Formulierung der Definitionen von Objekten wollen wir am Beispiel der Definition des Trapezes kennenlernen.

► **Def.:** Ein **Trapez** ist ein **Viereck**, das **ein Paar paralleler Seiten** hat.

(Ein Trapez = A; ein Viereck = $O(A)$; das ein Paar paralleler Seiten hat = $E_c(A)$)

Aufbau der Definition:
Die Definition eines Objektes A besteht aus drei Teilen.

- A: Objekt, das definiert wird.

Es wird das Trapez definiert.

- $O(A)$: ein Oberbegriff zu A

Ein Oberbegriff zum Trapez ist das Viereck, denn jedes Trapez ist auch ein Viereck.
Die Menge M_{Tr} aller Trapeze ist eine echte Teilmenge der Menge M_V aller Vierecke.
Man sagt auch: M_V ist eine echte Obermenge zu M_{Tr}.
Das bedeutet: Der Begriff Viereck ist ein Oberbegriff zum Begriff Trapez.

- $E_c(A)$: eine charakteristische Eigenschaft von A bezüglich $O(A)$

Die Eigenschaft „ein Paar paralleler Seiten" ist in der Menge der Vierecke für alle Trapeze charakteristisch. Man bezeichnet deshalb diese Eigenschaft als charakteristische Eigenschaft des Trapezes bezüglich des Oberbegriffes Viereck.

Formulierung der Definition:

(1) **mit Relativsatz**

A ist $O(A)$, … $E_c(a)$ …

(Hauptsatz: A ist $O(A)$; Relativsatz: … $E_c(a)$ …)

Beachten Sie: Das Relativpronomen im Relativsatz bezieht sich auf $O(A)$.

Beispiel: … **ein Viereck, das** …

(2) **ohne Relativsatz**
Ein Trapez ist ein Viereck **mit** einem Paar paralleler Seiten.

A ist $O(A)$ mit $E_c(A)$.

(Hauptsatz)

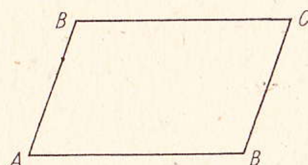
Auch folgende Formulierungen mit und ohne Relativsatz sind für Definitionen von Objektbegriffen typisch.

Unter einem **Trapez** versteht man	ein **Viereck**	das **ein Paar paralleler Seiten** hat. mit **einem Paar paralleler Seiten**.
A	$O(A)$	$E_c(A)$

Ein **Viereck**	das **ein Paar paralleler Seiten** hat, mit **einem Paar paralleler Seiten**	heißt nennt man bezeichnet man als	**Trapez.**
$O(A)$	$E_c(A)$		A

■ Man erhält die Definition eines Objektes A in zwei Schritten.
1. Schritt: Man gibt die drei Teile der Definition an. Das sind A, $O(A)$ und $E_c(A)$.
2. Schritt: Man formuliert die Definition.

Beispiel:
Wir wollen das Parallelogramm definieren.



$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Abb. 3.2. Parallelogramm

Teile der Definition:

- A: ein Parallelogramm
- $O(A)$: ein Viereck
- $E_c(A)$: zwei Paare paralleler Seiten

Formulierung der Definition:

> ▶ **Def.:** Ein Parallelogramm ist ein Viereck, das zwei Paare paralleler Seiten hat.

Wenn ein Viereck zwei Paare paralleler Seiten hat, dann besitzt es natürlich auch ein Paar paralleler Seiten.

Das bedeutet:

Jedes Parallelogramm ist auch ein Trapez.
Die Menge M_{Pa} aller Parallelogramme ist eine echte Teilmenge der Menge M_{Tr} aller Trapeze.

3.3. Parallelogrammarten

Auch folgende Vierecke sind Parallelogramme.

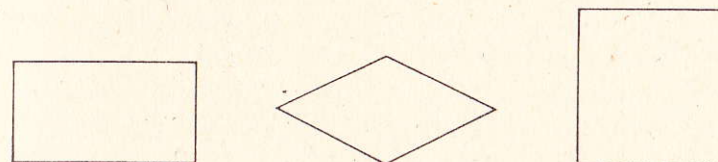


Abb. 3.3. Parallelogramm

Rechtecke, Rhomben und Quadrate besitzen zwei Paare paralleler Seiten und sind deshalb Parallelogramme.
In einer Tabelle wollen wir charakteristische Eigenschaften dieser Parallelogrammarten zusammenstellen. Dabei benutzen wir den Begriff Parallelogramm als Oberbegriff.

▶ Parallelogrammarten

A	$O(A)$	$E_c(A)$
Rechteck	Parallelogramm	ein **rechter** Winkel (4 rechte Winkel)
Rhombus	Parallelogramm	ein Paar gleich langer **benachbarter** Seiten (4 gleich lange Seiten)
Quadrat	Parallelogramm	ein rechter Winkel und ein Paar gleich langer benachbarter Seiten (4 gleich lange Seiten)

Tabelle 3.1. Parallelogrammarten

Bei der Angabe der charakteristischen Eigenschaften der Parallelogrammarten haben wir berücksichtigt, daß folgende Aussagen gelten:

Wenn ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter Winkel ist, dann sind alle Winkel des Parallelogramms rechte Winkel.
Wenn zwei benachbarte Seiten eines Parallelogramms gleich lang sind, dann sind alle Seiten des Parallelogramms gleich lang.

Wir haben die charakteristischen Eigenschaften der Parallelogrammarten bezüglich des Oberbegriffes Parallelogramm so angegeben, daß folgende Forderungen erfüllt werden:

■ Eine Definition **muß** alle Angaben enthalten, die notwendig sind.
Eine Definition **soll** keine Angaben enthalten, die nicht notwendig sind.

So ist es z. B. bei der Definition des Rechtecks mit Hilfe des Oberbegriffes Parallelogramm nicht notwendig, daß man *vier* rechte Winkel fordert..
Mit Hilfe der Angaben in der Tabelle können Sie die Definitionen der Parallelogrammarten formulieren.
Wichtig ist noch folgende Feststellung, die wir beim Vergleichen der charakteristischen Eigenschaften der Parallelogrammarten erhalten:

Die charakteristische Eigenschaft eines Quadrats besteht aus den charakteristischen Eigenschaften eines Rechtecks und eines Rhombus.

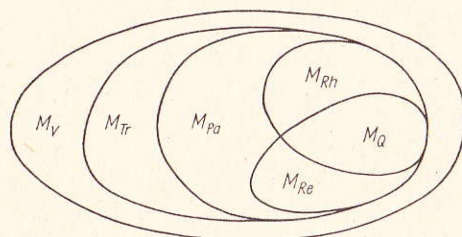
Das bedeutet:

■ Jedes Quadrat ist sowohl ein Rechteck als auch ein Rhombus.

Somit gilt:

Die Menge M_Q aller Quadrate ist die Durchschnittsmenge der Menge M_{Re} aller Rechtecke und der Menge M_{Rh} aller Rhomben.

Wir können für alle Vierecksarten, die wir betrachtet haben, ein Mengendiagramm zeichnen.



$M_Q \subset M_{Rh}$
$M_Q \subset M_{Re}$
$M_Q = M_{Rh} \cap M_{Re}$

Abb. 3.4. Vierecksarten

Mit Hilfe eines Mengendiagramms kann man leicht erkennen, welche Oberbegriffe es zu einem Begriff gibt.
So sieht man am Mengendiagramm der Vierecke, daß die Begriffe Rechteck und Rhombus zu den Oberbegriffen des Begriffes Quadrat gehören.
Deshalb kann man ein Quadrat auch mit diesen Oberbegriffen definieren:

Ein Quadrat ist ein Rhombus mit einem rechten Winkel.
Ein Quadrat ist ein Rechteck mit einem Paar gleich langer benachbarter Seiten.

Natürlich kann man ein Quadrat auch mit dem Oberbegriff Viereck definieren:

Ein Quadrat ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten und einem rechten Winkel.

Die beiden ersten Definitionen haben im Vergleich zur Definition mit dem Oberbegriff Viereck einen Vorteil. Die Angaben zur charakteristischen Eigenschaft des Begriffes Quadrat sind weniger umfangreich, weil die Oberbegriffe Rhombus und Rechteck „nahe" beim Begriff Quadrat liegen. Dagegen verwendet man in der letzten Definition den zum Begriff Quadrat „fernen" Oberbegriff Viereck. Deshalb benutzt man zur Definition von Begriffen gern „nahe" Oberbegriffe.

Der Begriff Trapez ist auch ein Oberbegriff zum Begriff Parallelogramm. Er spielt aber bei der Definition der Parallelogrammarten keine Rolle.

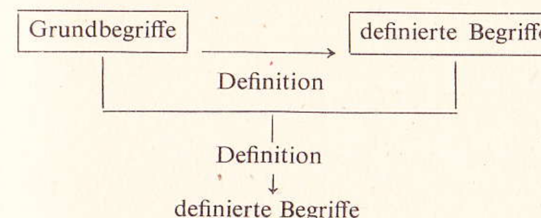
Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welche Arten von Definitionen unterscheidet man?
2. Mit welchen Objekten beschäftigt sich die Geometrie?
3. Aus welchen Teilen besteht die Definition eines Objektes?
4. Was bedeutet $O(A)$?
5. Was bedeutet $E_c(A)$?
6. Wie erhält man die Definition eines Objektes?
7. Welche Forderungen muß eine Definition erfüllen?
8. Welche Bedeutung haben Mengendiagramme für das Definieren?
9. Warum benutzt man zur Definition eines Objektes gern einen „nahen" Oberbegriff?

Aufgaben

1. Beantworten Sie die Fragen!
Betrachten Sie dazu das folgende Schema!



1.1. In welche zwei Arten von Begriffen kann man die Begriffe einer Theorie einteilen?
1.2. Welche Begriffe stehen am Anfang einer Theorie?
1.3. Wie erhält man die Begriffe einer Theorie?
1.4. Was für Begriffe benutzt man beim Definieren?

2. Lesen Sie den Text, und beantworten Sie die Fragen!

Reale und ideale Objekte

Man unterscheidet reale und ideale Objekte.
So ist z. B. ein Atom ein reales Objekt. Ein Atom existiert in der objektiven Realität. Dabei versteht man unter der objektiven Realität die materielle Welt, die außerhalb und unabhängig von unserem Denken existiert.
Ideale Objekte sind z. B. alle Figuren. Es gibt kein reales Objekt, das wie ein Punkt keine Ausdehnung besitzt. Ideale Objekte gibt es nur in unserem Denken. Man bezeichnet sie deshalb auch als Denkobjekte.

Die Mathematik beschäftigt sich mit idealen Objekten. Das bedeutet aber nicht, daß die Mathematik keine Beziehungen zur objektiven Realität hat. Die idealen Objekte Zahl und Figur wurden in einer langen geschichtlichen Entwicklung aus der objektiven Realität abgeleitet. Friedrich Engels schreibt: „Die Begriffe von Zahl und Figur sind nirgends anders hergenommen, als aus der wirklichen Welt. Wie der Begriff Zahl, so ist der Begriff Figur ... nicht im Kopf aus dem reinen Denken entsprungen. Es mußte Dinge geben, die Gestalt hatten und deren Gestalten man verglich, ehe man auf den Begriff Figur kommen konnte.“

Das bedeutet: Der Ursprung der Mathematik ist wie bei jeder anderen Wissenschaft die objektive Realität.

Fragen zum Text

Welche zwei Arten von Objekten gibt es?
Was versteht man unter einem realen Objekt?
Was versteht man unter einem idealen Objekt?
Was versteht man unter der objektiven Realität?
Warum ist eine Gerade kein reales Objekt?
Warum liegt der Ursprung der Mathematik in der objektiven Realität?

3. Formulieren Sie die Definition des Begriffes Parallelogramm mit folgenden sprachlichen Mitteln!

3.1. ... heißt ...; mit Relativsatz
3.2. ... nennt man ...; ohne Relativsatz
3.3. ... bezeichnet man als ...; ohne Relativsatz
3.4. Unter ... versteht man ...; mit Relativsatz

4. Eine Figur hat die charakteristische Eigenschaft bezüglich des Oberbegriffes Punktmenge, daß sie aus zwei Strahlen h und k mit einem gemeinsamen Anfangspunkt besteht.

4.1. Wie heißt die Figur?
4.2. Definieren Sie diese Figur!

5. Eine Figur hat die charakteristische Eigenschaft bezüglich des Oberbegriffes Punktmenge, daß sie aus zwei verschiedenen Punkten A und B und aus der Menge aller Punkte zwischen A und B besteht.

5.1. Wie heißt die Figur?
5.2. Definieren Sie diese Figur!

6. Formulieren Sie mit Hilfe des Oberbegriffes Parallelogramm die Definitionen folgender Figuren!

1. Rechteck
2. Rhombus
3. Quadrat

7. Antworten Sie mit Hilfe des Diagramms der Menge aller Vierecke auf folgende Fragen!

7.1. Welche Mengen von Vierecken sind Teilmengen der Menge aller Parallelogramme?
7.2. Welche Vierecksmenge ist Teilmenge der Menge der Rechtecke und Teilmenge der Menge der Rhomben?
7.3. Welche Rhomben gehören zur Menge der Rechtecke?
7.4. Welche Vierecke bilden die Durchschnittsmenge der Menge aller Rechtecke und der Menge aller Rhomben?
7.5. Welche Rechtecke gehören zur Menge der Rhomben?

8. Mit welchen Oberbegriffen kann man folgende Figuren definieren?

1. Quadrat
2. Rechteck
3. Rhombus
4. Parallelogramm

9. Formulieren Sie mit Hilfe des Oberbegriffes Viereck die Definitionen folgender Figuren!

1. Parallelogramm
2. Rhombus
3. Rechteck
4. Quadrat

10. Begründen Sie, warum die folgenden sprachlichen Formulierungen nicht die Forderungen erfüllen, die man an eine Definition stellt!
Geben Sie dabei an,
(a) welche notwendigen Aufgaben fehlen,
(b) welche Angaben nicht notwendig sind,
(c) welche Angaben weggelassen werden müssen!
Korrigieren Sie die gegebenen sprachlichen Formulierungen, so daß sie die Anforderungen an eine Definition erfüllen!

1. Ein Quadrat ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten.
2. Ein Rechteck ist ein Viereck mit drei rechten Winkeln und verschieden langen Seiten.
3. Ein Parallelogramm ist ein Viereck mit zwei Paaren gleich langer Seiten.
4. Ein Trapez ist ein Viereck mit genau einem Paar paralleler Seiten.
5. Ein Rhombus ist ein Parallelogramm mit einem Paar gleich langer Seiten.
6. Ein Rhombus ist ein Viereck mit zwei Paaren benachbarter gleich langer Seiten.
7. Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit zwei Paaren gleich langer Gegenseiten und einem rechten Winkel.

4. Definitionen von Relationen

4.1. Aufbau und Formulierung der Definitionen von Relationen

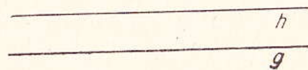


Abb. 4.1. Parallelität zweier Geraden

g ist eine Parallele zu h, bzw. h ist eine Parallele zu g.
Die beiden Geraden g und h sind zueinander parallel (in Zeichen: $g \parallel h$).
Zwischen g und h besteht eine Relation R.
Wir wollen R definieren.
Dazu formulieren wir R:

R: Zwei Geraden g und h sind zueinander parallel.

Bei der Definition einer Relation R gibt man an, unter welcher Bedingung B die Relation R besteht.

Man formuliert B mit bereits definierten Begriffen bzw. Grundbegriffen.

B: g und h liegen in einer Ebene und haben keinen gemeinsamen Punkt (in Zeichen: $g, h \subset \varepsilon \wedge g \cap h = \emptyset$)

oder

g und h haben alle Punkte gemeinsam (in Zeichen: $g = h$)

Mit Hilfe von R und B können wir die Definition der Parallelität von zwei Geraden formulieren.

► **Def.:** Zwei Geraden g und h sind zueinander parallel,	**wenn**	g und h in einer Ebene liegen und keinen gemeinsamen Punkt haben **oder** g und h alle Punkte gemeinsam haben.
R		**B**

Diese Definition hat die sprachliche Form „R, wenn B".

Man kann sie auch mit Hilfe von Symbolen in der Form „$B \rightarrow R$" formulieren:

$$(g, h \subset \varepsilon \wedge g \cap h = \emptyset) \vee g = h \rightarrow g \parallel h$$

■ Man erhält die Definition einer Relation in drei Schritten.
1. Schritt: Man formuliert die Relation R.
2. Schritt: Man formuliert die Bedingung B.
3. Schritt: Man formuliert die Definition in der Form „R, wenn B" oder „Wenn B, so R" (in Zeichen: $B \rightarrow R$).

Beispiele:

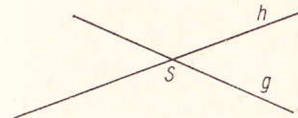


Abb. 4.2. Schnittpunkt zweier Geraden

Die Geraden g und h schneiden einander in dem Punkt S. S ist der Schnittpunkt von g und h (in Zeichen: S_{gh}). Zwischen dem Punkt S und den Geraden g und h besteht eine Relation R.

R: S ist der Schnittpunkt der Geraden g und h.
B: g und h sind verschiedene Geraden und S liegt auf g und h.

► **Def.:** S ist der Schnittpunkt S_{gh} der Geraden g und h, wenn g und h verschiedene Geraden sind **und** S auf g und h liegt.
In Zeichen: $g \neq h \wedge S \in g, h \rightarrow S = S_{gh}$



Abb. 4.3. Verbindungsgerade zweier Punkte

Die Gerade g verbindet die Punkte P und Q. g ist die Verbindungsgerade der Punkte P und Q (in Zeichen: g_{PQ}).

► **Def.:** Die Gerade g ist die Verbindungsgerade g_{PQ} der Punkte P und Q, wenn P und Q verschiedene Punkte sind **und** P und Q auf g liegen.
In Zeichen: $P \neq Q \wedge P, Q \in g \rightarrow g = g_{PQ}$

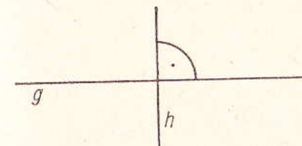


Abb. 4.4. Orthogonalität zweier Geraden

Die Gerade g ist eine Senkrechte (Orthogonale) zur Geraden h, bzw. h ist eine Senkrechte zu g.

Die beiden Geraden g und h sind senkrecht (orthogonal) zueinander (in Zeichen: $g \perp h$).
Man sagt auch: g und h stehen aufeinander senkrecht.
Die Relation R, die wir hier betrachten, ist die Orthogonalität von zwei Geraden.

▶ **Def.:** Zwei Geraden g und h sind zueinander senkrecht, wenn g und h rechte Winkel bilden.

Wichtig ist, daß man Relationsbegriffe als solche erkennt und richtig formuliert.
So ist z. B. die Formulierung „g ist senkrecht" unvollständig. Der Begriff „senkrecht sein" ist ein Relationsbegriff. Deshalb muß man alle Objekte angeben, zwischen denen die Relation besteht. Es muß also richtig heißen: g ist senkrecht zu h.
Wir wollen noch einige Relationen formulieren.

4.2. Relationen zwischen einem Kreis und einer Geraden bzw. einer Strecke

Der Kreis k mit dem Mittelpunkt M und die Strecke $\overline{MP}$ mit $P \in k$ befinden sich in einer besonderen Lage zueinander.
Zwischen k und $\overline{MP}$ besteht eine Relation R. Man formuliert R folgendermaßen:

Die Strecke $\overline{MP}$ ist ein Radius des Kreises k.

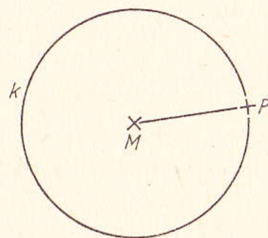


Abb. 4.5.

Zu jedem Punkt $P \in k$ gibt es genau eine Strecke $\overline{MP}$.
Alle diese Strecken sind Radien des Kreises k und haben die gleiche Länge r.
Man schreibt: $l(\overline{MP}) = r$
Man sagt: Die Länge der Strecke $\overline{MP}$ ist r.
Beachten Sie den Unterschied zwischen $\overline{MP}$ und $r = l(\overline{MP})$!
$\overline{MP}$ ist eine Strecke und somit eine Punktmenge. $l(\overline{MP})$ ist die Länge der Strecke $\overline{MP}$ und somit eine Größe. Unter einer Größe versteht man ein Produkt aus einem Zahlenwert und einer Einheit.

$$r = l(\overline{MP}) = 2\,\text{cm}$$
$$= 2 \cdot 1\,\text{cm}$$

▶ **Def.:** Größe = Zahlenwert · Einheit

Auch die Größe $r = l(\overline{MP})$ bezeichnet man wie die Strecke als Radius des Kreises k.
Jeder Kreis k ist durch seinen Mittelpunkt M und seinen Radius r eindeutig bestimmt.
Man schreibt: $k(M; r)$
Man sagt: Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r

Die Strecke $\overline{AB}$ ist eine Sehne des Kreises k.

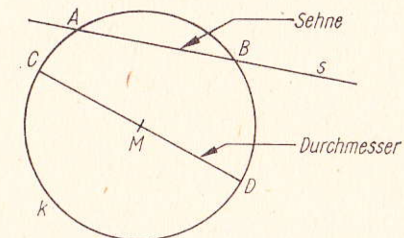


Abb. 4.6. Sehne, Durchmesser und Sekante eines Kreises

Die Strecke $\overline{CD}$ mit $M \in \overline{CD}$ ist ein **Durchmesser** des Kreises k mit dem Mittelpunkt M.

Die Größe $d = 2r$ ist der Durchmesser des Kreises k.

Die Gerade s ist eine **Sekante** des Kreises k.

t berührt k in P. Die Gerade t ist eine **Tangente** des Kreises k. t ist die Tangente an k mit dem Berührungspunkt P.

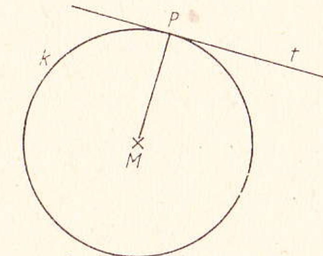


Abb. 4.7. Tangente eines Kreises

$\overline{MP}$ ist der Berührungsradius der Tangente t an den Kreis k.

Der Berührungsradius einer Tangente an k steht senkrecht auf dieser Tangente.

4.3. Relationen zwischen einem Kreis und einem Winkel

$\sphericalangle APB$ ist ein **Peripheriewinkel** des Kreises k über dem Kreisbogen $\widehat{AB}$.

$\sphericalangle AMB$ ist der **Zentriwinkel** des Kreises k über dem Kreisbogen $\widehat{AB}$.

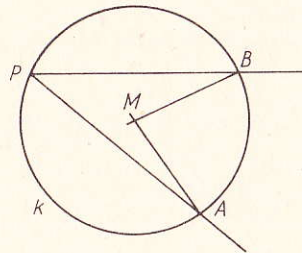


Abb. 4.8. Peripheriewinkel und Zentriwinkel eines Kreises

4.4. Relationen zwischen einem Dreieck und einer Geraden bzw. einem Kreis

Wir betrachten ein Dreieck $ABC \subset \varepsilon$ und die Gerade $g \subset \varepsilon$ mit $g \cap ABC \neq \emptyset$.

Die Gerade g ist die **Seitenhalbierende** der Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC. Für g gilt: $g \ni B \wedge g \ni M_b$.

M_b ist der Mittelpunkt der Dreiecksseite mit der Länge b. Die im Dreieck liegenden Abschnitte der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks bezeichnet man im allgemeinen mit s_a, s_b und s_c.

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt S. In Zeichen:

$s_a \cap s_b \cap s_c = \{S\}$

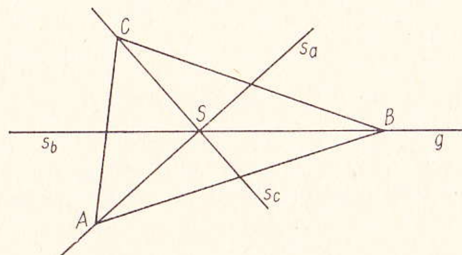


Abb. 4.9. Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks

Die Gerade g ist die **Höhe** zur Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC. Für g gilt: $g \perp \overline{AB} \wedge g \ni C$

Die im Dreieck liegenden Abschnitte der drei Höhen eines Dreiecks bezeichnet man im allgemeinen mit h_a, h_b und h_c.

Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt H. In Zeichen:

$h_a \cap h_b \cap h_c = \{H\}$

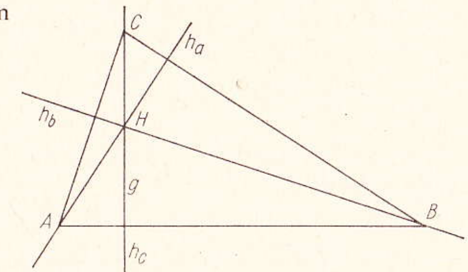


Abb. 4.10. Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks

Die Gerade g ist die **Mittelsenkrechte** der Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC.
Für g gilt: $g \perp \overline{AB} \wedge g \ni M_c$

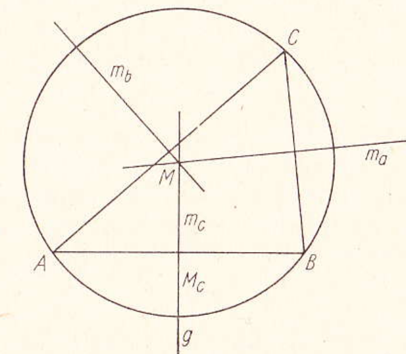


Abb. 4.11. Umkreis eines Dreiecks

M_c ist der **Mittelpunkt** der Dreiecksseite mit der Länge c.

Die Mittelsenkrechten m_a, m_b und m_c eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt M. In Zeichen: $m_a \cap m_b \cap m_c = \{M\}$
M ist der Mittelpunkt eines Kreises k, der durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks ABC geht.

Der Kreis k mit $A, B, C \in k$ ist der **Umkreis** des Dreiecks ABC.

Die Gerade g ist die **Winkelhalbierende** des Winkels mit der Größe γ.

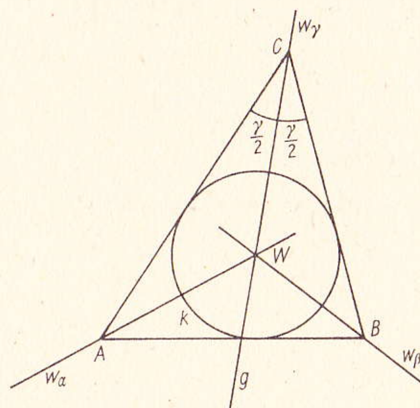


Abb. 4.12. Umkreis eines Dreiecks

Die im Dreieck liegenden Abschnitte der drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks bezeichnet man im allgemeinen mit w_α, w_β und w_γ.
Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt W.
In Zeichen: $w_\alpha \cap w_\beta \cap w_\gamma = \{W\}$
W ist der Mittelpunkt eines Kreises k, der alle Dreiecksseiten von innen berührt.

k ist der **Inkreis** des Dreiecks.

Die Begriffe Inkreis und Umkreis sind Relationsbegriffe für Lagebeziehungen zwischen einem Dreieck und einem Kreis.
Die Begriffe Höhe, Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende und Winkelhalbierende sind Relationsbegriffe, die Lagebeziehungen zwischen Seiten bzw. Winkeln eines Dreiecks und einer Geraden angeben.

4.5. Relationen zwischen gleichartigen Figuren

Wir wollen wichtige Relationen der Geometrie formulieren, die zwischen gleichartigen Figuren bestehen können.
Gleichartige Figuren sind z. B. zwei Strecken, zwei Winkel, zwei beliebige n-Ecke mit gleicher Anzahl n von Eckpunkten.

4.5.1. Kongruenz

Wir betrachten zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

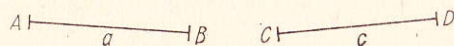


Abb. 4.13. Kongruente Strecken

Es ist $\overline{AB} \neq \overline{CD}$, denn $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind verschiedene Punktmengen.
Beide Strecken sind aber gleich lang.
Für die Streckenlängen gilt die Gleichheitsrelation $l(\overline{AB}) = l(\overline{CD})$ bzw. $a = c$.
Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind kongruent: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Man liest:

$\overline{AB}$ ist kongruent zu $\overline{CD}$.
$\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind kongruent.

■ Kongruente Strecken sind gleich lang.

Entsprechende Aussagen kann man für Winkel formulieren.

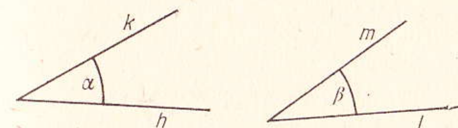


Abb. 4.14. Kongruente Winkel

$\sphericalangle(h, k)$ und $\sphericalangle(l, m)$ sind kongruent.
Man schreibt: $\sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(l, m)$

■ Kongruente Winkel sind gleich groß.

Man schreibt: $\sphericalangle_g(h, k) = \sphericalangle_g(l, m)$ bzw. $\alpha = \beta$
Man liest:

Die Größe des Winkels $\sphericalangle(h, k)$ ist gleich der Größe des Winkels $\sphericalangle(l, m)$.

Wir betrachten nun Vielecke (n-Ecke mit $n \geqq 3$).

■ In kongruenten n-Ecken sind einander entsprechende (gleichliegende) Strecken und Winkel kongruent.

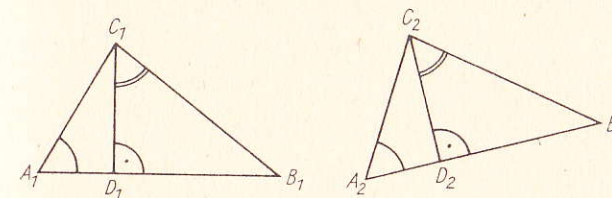


Abb. 4.15. Kongruente Dreiecke

So gilt z. B. bei den kongruenten Dreiecken $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$:

$\overline{A_1C_1} \cong \overline{A_2C_2}$, $\overline{C_1D_1} \cong \overline{C_2D_2}$ usw.
$\sphericalangle C_1A_1B_1 \cong \sphericalangle C_2A_2B_2$, $\sphericalangle B_1C_1D_1 \cong \sphericalangle B_2C_2D_2$ usw.

Da kongruente Strecken gleich lang und kongruente Winkel gleich groß sind, gilt folgende Aussage:

■ Wenn zwei n-Ecke F_1 und F_2 kongruent sind, dann sind alle gleichliegenden Strecken von F_1 und F_2 gleich lang und alle gleichliegenden Winkel von F_1 und F_2 gleich groß.

Weil kongruente Figuren in Streckenlängen und Winkelgrößen übereinstimmen, haben sie auch den gleichen Umfang u, den gleichen Flächeninhalt A bzw. das gleiche Volumen V.
Es gilt z. B.:
Der Umfang eines Dreiecks ABC ist

$$u = a + b + c.$$

Der Flächeninhalt einer Dreiecksfläche $\overline{ABC}$ ist

$$A = \frac{1}{2} ch_c.$$

Anmerkung: Statt vom Flächeninhalt der Dreiecksfläche spricht man auch kurz vom Flächeninhalt des Dreiecks.

Das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a ist

$$V = a^3 \text{ („}a\text{ hoch 3")}$$

Wenn $F_1 \cong F_2$ und $F_1 \neq F_2$ sind, dann unterscheiden sich F_1 und F_2 nur durch ihre unterschiedliche Lage.

4.5.2. Ähnlichkeit

Wir betrachten zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$.

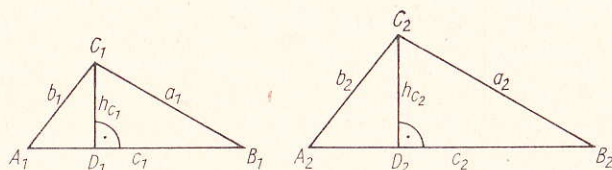


Abb. 4.16. Ähnliche Dreiecke

Diese beiden Dreiecke sind nicht kongruent, aber ähnlich.
Man schreibt: $A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$
Man liest:

$A_1B_1C_1$ ist ähnlich zu $A_2B_2C_2$.
$A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ sind ähnlich.

Gleichliegende Winkel ähnlicher Figuren sind kongruent.
Es gilt also:

$$\sphericalangle C_1A_1B_1 \cong \sphericalangle C_2A_2B_2$$
$$\sphericalangle A_1B_1C_1 \cong \sphericalangle A_2B_2C_2$$
$$\sphericalangle B_1C_1A_1 \cong \sphericalangle B_2C_2A_2$$

Die Längen gleichliegender Strecken ähnlicher Figuren sind zueinander proportional.
Das bedeutet, daß sich die Längen gleichliegender Strecken ähnlicher Figuren um den gleichen Faktor k unterscheiden.
Es gilt:

$a_2 = k \cdot a_1$ $\qquad h_{c_2} = k \cdot h_{c_1}$
$b_2 = k \cdot b_1$ $\qquad$ usw.
$c_2 = k \cdot c_1$

Der Faktor k heißt Proportionalitätsfaktor.
Der Proportionalitätsfaktor ist gleich den Verhältnissen $a_2 : a_1$ („a_2 zu a_1"), $b_2 : b_1$, ... der Längen gleichliegender Strecken.
Für die ähnlichen Dreiecke, die wir betrachten, ist $k = 1{,}3$.
Somit gilt:

$$a_2 : a_1 = 1{,}3$$
$$b_2 : b_1 = 1{,}3$$
$$c_2 : c_1 = 1{,}3$$

Weil diese Verhältnisse gleich sind, kann man sie zu Gleichungen zusammenfassen.
Beispiel:

$$a_2 : a_1 = b_2 : b_1$$
(„a_2 zu a_1 wie b_2 zu b_1")

Man nennt solche Gleichungen Verhältnisgleichungen oder Proportionen.
Es gilt also:

■ Wenn zwei Figuren F_1 und F_2 ähnlich sind, dann sind alle gleichliegenden Winkel von F_1 und F_2 gleich groß und die Längen gleichliegender Strecken von F_1 und F_2 zueinander proportional.

Ähnliche Figuren sind z. B. alle Kreise und alle regelmäßigen Vielecke mit gleicher Seitenzahl $n \geqq 3$.
Bei regelmäßigen Vielecken sind alle Winkel gleich groß und alle Seiten gleich lang.
Zu den regelmäßigen Vielecken gehört z. B. das Quadrat.
Ein Quadrat ist ein regelmäßiges Vieleck (n-Eck) mit $n = 4$.
Alle Quadrate sind einander ähnlich.
Auch alle kongruenten Figuren sind ähnliche Figuren. Kongruente Figuren sind ähnliche Figuren mit $k = 1$.
Besonders wichtig sind Aussagen über die Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken, denn Dreiecke spielen bei der Betrachtung vieler Figurenarten eine große Rolle. So bilden z. B. für $n \geqq 4$ die Seiten und die Diagonalen eines n-Ecks Dreiecke. Mit Hilfe dieser Dreiecke erhält man Aussagen über die n-Ecke.

4.5.3. Symmetrie

Axialsymmetrie. In einer Ebene ε liegen eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$.
Durch den Punkt P zeichnen wir die Senkrechte h zur Geraden g.
Dann bestimmen wir auf h einen Punkt P', so daß P und P' den gleichen Abstand von g haben.

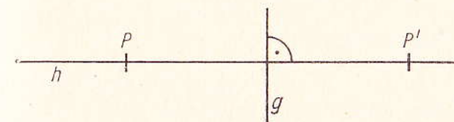


Abb. 4.17. Zur Spiegelung an einer Geraden

Wir haben den Punkt P an der Geraden g gespiegelt. Bei der Spiegelung an einer Geraden g erhält man zu einem Punkt P einen Punkt P'.
Zwischen P, P' und g gilt dann folgende Relation:

> Der Punkt P' liegt symmetrisch zum Punkt P bezüglich der Geraden g.
> Die Punkte P und P' liegen symmetrisch bezüglich der Geraden g.

Man kann auch eine beliebige Figur F an einer Geraden g spiegeln.

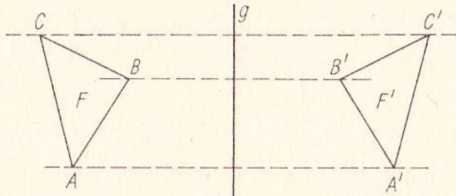


Abb. 4.18. Spiegelung an einer Geraden

Man nennt F' das Bild von F bei der Spiegelung an der Geraden g.

▶ **Def.:** Zwei Figuren F und F' liegen symmetrisch bezüglich einer Geraden g, wenn bei der Spiegelung an g die Figur F' das Bild von F ist.

Wenn zwei Figuren F und F' symmetrisch bezüglich einer Geraden liegen, so sind sie kongruent.

Zentralsymmetrie. Durch einen Punkt Z und einen Punkt P mit $P \neq Z$ zeichnen wir die Verbindungsgerade g_{PZ}.
Dann bestimmen wir auf g_{PZ} einen Punkt P', so daß P und P' den gleichen Abstand von Z haben.

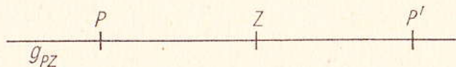


Abb. 4.19. Zur Spiegelung an einem Punkt

Wir haben den Punkt P an dem Punkt Z gespiegelt. Bei einer Spiegelung an einem Punkt Z erhält man zu einem Punkt P einen Punkt P'.
Zwischen P, P' und Z gilt dann folgende Relation:

> Der Punkt P' liegt symmetrisch zum Punkt P bezüglich des Punktes Z.
> Die Punkte P und P' liegen symmetrisch bezüglich des Punktes Z.

Man kann eine beliebige Figur F an einem Punkt Z spiegeln.

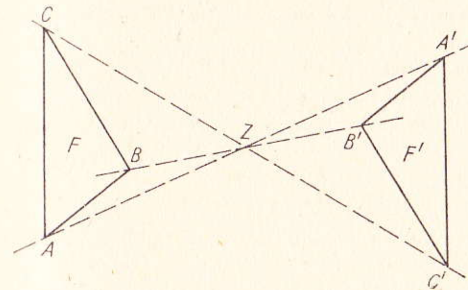


Abb. 4.20. Spiegelung an einem Punkt

F' ist das Bild von F bei der Spiegelung an dem Punkt Z.
Man kann auch die Symmetrie von Figuren bezüglich eines Punktes definieren.

▶ **Def.:** Zwei Figuren F und F' liegen symmetrisch bezüglich eines Punktes Z, wenn bei der Spiegelung an Z die Figur F' das Bild von F ist.

Wenn zwei Figuren F und F' symmetrisch bezüglich eines Punktes liegen, so sind sie kongruent.

Anmerkung: Bei der Spiegelung an einer Geraden g gilt: Für alle Punkte P auf der Geraden g ist das Bild P' gleich dem Punkt P. Bei der Spiegelung an einem Punkt Z gilt: Das Bild Z' des Punktes Z ist gleich dem Punkt Z.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie erhält man die Definition eines Relationsbegriffes?
2. Mit welchen Begriffen definiert man die Bedingung B einer Relation R?
3. Unter welcher Bedingung ist die Gerade g die Verbindungsgerade von zwei Punkten P und Q?
4. Unter welcher Bedingung ist ein Punkt S der Schnittpunkt zweier Geraden g und h?
5. Unter welcher Bedingung sind zwei Geraden g und h parallel zueinander?
6. Wie definiert man die Orthogonalität von zwei Geraden g und h?
7. Unter welcher Bedingung ist $\overline{AM}$ ein Radius eines Kreises k?
8. Welcher Unterschied besteht zwischen einem Radius $\overline{MP}$ eines Kreises k und dem Radius r von k?
9. Was versteht man unter einer Größe?
10. Was bedeutet d in $d = 2r$?
11. Welche Relationen gibt es zwischen einem Kreis und einer Geraden?
12. Welche besonderen Relationen gibt es zwischen einem Dreieck und einer Geraden?

13. Welche besonderen Relationen gibt es zwischen einem Dreieck und einem Kreis?
14. Welcher Punkt ist der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks ABC?
15. Welcher Punkt ist der Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks ABC?
16. Warum ist der Begriff Umkreis als Relationsbegriff auffaßbar?
17. Unter welcher Bedingung sind zwei Strecken kongruent?
18. Unter welcher Bedingung sind zwei Winkel kongruent?
19. Unter welcher Bedingung sind zwei Figuren F_1 und F_2 kongruent?
20. Was folgt aus der Kongruenz zweier Figuren F_1 und F_2 für alle einander entsprechenden Größen von F_1 und F_2?
21. Was folgt aus der Kongruenz zweier Figuren F_1 und F_2 für zwei gleichliegende Strecken bzw. Winkel von F_1 und F_2?
22. Haben zwei kongruente Dreiecke den gleichen Flächeninhalt?
23. Wodurch können sich kongruente Figuren unterscheiden?
24. Unter welchen Bedingungen sind zwei Dreiecke ähnlich?
25. Was folgt aus der Ähnlichkeit zweier Figuren F_1 und F_2 für die Größe gleichliegender Winkel von F_1 und F_2?
26. Was folgt aus der Ähnlichkeit zweier Figuren F_1 und F_2 für die Längen gleichliegender Strecken von F_1 und F_2?
27. Wie definiert man die Symmetrie zweier Figuren F und F' bezüglich einer Geraden g?
28. Unter welcher Bedingung liegen zwei Figuren F_1 und F_2 symmetrisch bezüglich eines Punktes Z?
29. Warum haben zwei Dreiecke, die symmetrisch bezüglich eines Punktes Z liegen, den gleichen Umfang u?
30. Welche Relation gilt bei der Spiegelung an einer Geraden g für einen Punkt $P \in g$ und sein Bild P'?
31. Welcher Punkt ist bei der Spiegelung an einem Punkt Z gleich seinem Bild?

Aufgaben

1. Formulieren Sie folgende Definitionen in Worten!

1. $g \neq h \wedge S \in g, h \rightarrow S = S_{gh}$
2. $P \neq Q \wedge g \ni P, Q \rightarrow g = g_{PQ}$
3. $g = h \vee (g, h \subset \varepsilon \wedge g \frown h = \emptyset) \rightarrow g \parallel h$
4. $\varepsilon = \eta \vee \varepsilon \frown \eta = \emptyset \rightarrow \varepsilon \parallel \eta$

Anmerkung: ε (Epsilon) und η (Eta) bezeichnen Ebenen.

2. einander schneiden in D

die Diagonalen eines Parallelogramms / S

► Die Diagonalen eines Parallelogramms schneiden einander in einem Punkt S.

alle Durchmesser eines Kreises / M
die Winkelhalbierenden eines Dreiecks / W
die Mittelsenkrechten eines Dreiecks / M
die Seitenhalbierenden eines Dreiecks / S
die Höhen eines Dreiecks / H

3. zueinander parallel sein / zueinander senkrecht sein

Bilden Sie eine Frage mit „Welche Relation besteht zwischen ...“, und beantworten Sie die Frage!

die Diagonalen eines Rhombus

► Welche Relation besteht zwischen den Diagonalen eines Rhombus?
Die Diagonalen eines Rhombus sind zueinander senkrecht.

die Diagonalen eines Quadrats
zwei Gegenseiten eines Rechtecks
die Schenkel eines rechten Winkels
zwei benachbarte Seiten eines Rechtecks
die Mittelsenkrechte und die Höhe einer Dreiecksseite
die Tangente an einen Kreis und ihr Berührungsradius
die Mittelsenkrechten der Seiten eines Rechtecks

4. Ergänzen Sie folgende Ausdrücke zu wahren Aussagen!
Formulieren Sie diese Aussagen mit Symbolen und Worten!

$g \parallel h \rightarrow g \frown h = \emptyset \vee \ldots$

► $g \parallel h \rightarrow g \frown h = \emptyset \vee g = h$
Wenn die Geraden g und h zueinander parallel sind, so haben g und h keinen gemeinsamen Punkt, oder h und g sind gleich.

1. $g \parallel h \rightarrow \exists\, \varepsilon : g \subset \varepsilon \wedge \ldots$
2. $\varepsilon \parallel \eta \rightarrow \varepsilon \frown \eta = \emptyset \vee \ldots$
3. $g \nparallel h \rightarrow (\sim \exists\, \varepsilon : g, h \subset \varepsilon) \vee g \frown h \neq \ldots$
4. $\varepsilon \nparallel \eta \rightarrow \varepsilon \frown \eta \neq \ldots$
5. $g \parallel \varepsilon \rightarrow g \frown \varepsilon = \emptyset \vee \ldots$
6. $\varepsilon \nparallel \eta \rightarrow \varepsilon \frown \eta = \ldots$

5. Formulieren Sie folgende Aussagen in Worten!

$g, h \perp \varepsilon \rightarrow g \parallel h$

► Wenn die Geraden g und h senkrecht zur Ebene ε sind, so sind g und h zueinander parallel.

1. $g \perp \varepsilon, \eta \rightarrow \varepsilon \parallel \eta$
2. $g \perp \varepsilon \wedge g \parallel \eta \rightarrow \varepsilon \perp \eta$
3. $g \perp \varepsilon \wedge g \parallel h \rightarrow h \perp \varepsilon$
4. $\varepsilon \parallel \eta \wedge g \perp \varepsilon \rightarrow g \perp \eta$
5. $P \notin \varepsilon \rightarrow \exists\, g : g \ni P \wedge g \perp \varepsilon$
6. $P \notin g \rightarrow \exists\, h : h \ni P \wedge h \perp g$

6. Antworten Sie auf folgende Fragen!

1. Wo liegen alle Punkte $P \in \varepsilon$, die von einem Punkt $M \in \varepsilon$ den gleichen Abstand r haben?
2. Wo liegen alle Punkte $P \in \varepsilon$, die von den beiden Endpunkten einer Strecke $\overline{AB} \subset \varepsilon$ den gleichen Abstand haben?
3. Wo liegen alle Punkte $P \in \varepsilon$, die von einer Geraden $g \subset \varepsilon$ den gleichen Abstand haben?

4. Wo liegen alle Punkte $P \in \varepsilon$, die von den Schenkeln eines Winkels $\sphericalangle(h, k) \subset \varepsilon$ den gleichen Abstand haben?
5. Wo liegen alle Punkte, die von zwei Parallelen g und h den gleichen Abstand haben?

7. Konstruieren Sie
1. den Umkreis eines Dreiecks ABC!
2. den Inkreis eines Dreiecks ABC!
3. den Mittelpunkt eines Kreises k!

Erklären Sie die Konstruktionen!

8. Formulieren Sie folgende Aussagen über die Höhen, Mittelsenkrechten, Seitenhalbierenden und Winkelhalbierenden eines Dreiecks ABC in Worten!
1. $h_a \cap h_b \cap h_c = \{H\}$
2. $m_a \cap m_b \cap m_c = \{M\}$
3. $s_a \cap s_b \cap s_c = \{S\}$
4. $w_\alpha \cap w_\beta \cap w_\gamma = \{W\}$

9. Definieren Sie
1. den Inkreis $k\ (W; g)$ des Dreiecks ABC!
2. den Umkreis $k\ (M; r)$ des Dreiecks ABC!

10. Gegeben ist eine Relation R und die Bedingung B, mit der man R definieren kann.
(a) Zeichnen Sie die Figuren, zwischen denen die Relation R besteht!
(b) Formulieren Sie mit Hilfe von R und B die Definition der Relation R!

Beispiel:
R: Der Punkt M ist der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$.
$B: M \in AB \wedge l(\overline{MA}) = l(\overline{MB})$

► (a) A |————M————| B

► (b) Der Punkt M ist der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$, wenn M zwischen A und B liegt und die beiden Strecken $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ gleich lang sind.

1. R: Der Punkt M ist der Mittelpunkt eines Kreises k.
   B: M hat von allen Punkten des Kreises k den gleichen Abstand.
2. R: Die Gerade g ist die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$.
   B: $g \perp \overline{AB} \wedge g \ni M$ (Mittelpunkt von $\overline{AB}$)
3. R: Die Strecke $\overline{AB}$ ist eine Sehne eines Kreises k.
   B: $A, B \in k$
4. R: Die Strecke $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M.
   B: $A, B \in k \wedge M \in AB$
5. R: Die Gerade s ist eine Sekante eines Kreises k.
   B: $s \cap k = \{A; B\}$
6. R: Die Gerade t ist eine Tangente eines Kreises k.
   B: $t \cap k = \{P\}$

11. Formulieren Sie die Definitionen von Relationen!
Zeichnen Sie die Figuren, zwischen denen eine Relation besteht!

$t \cap k(M; r) = \{B\} \rightarrow t \ldots$

► Wenn eine Gerade t und ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r **genau** einen gemeinsamen Punkt B haben, so ist t die Tangente an k mit dem Berührungspunkt B.

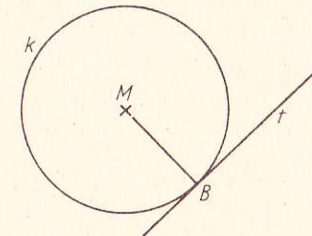


Abb. 4.21.

1. $A, B \in k(M; r) \rightarrow \overline{AB} \ldots$
2. $A, B, C \in k(M; r) \wedge C \notin \widehat{AB} \rightarrow \sphericalangle ACB \ldots$
3. $A, B \in k(M; r) \wedge M \in AB \rightarrow \overline{AB} \ldots$
4. $ABC \cap k(M; r) = \{A; B; C\} \rightarrow k(M; r) \ldots$
5. $A, B \in k(M; r) \rightarrow \sphericalangle AMB \ldots$
6. $ABC \cap k(M; r) = \{P; Q; R\} \wedge k(M; r) \subset \overline{ABC} \rightarrow k(M; r) \ldots$

12. kongruent sein zu D

Die Seiten und Diagonalen eines Rhombus bilden kongruente Dreiecke.
Geben Sie alle Paare dieser kongruenten Dreiecke an!

► $ASD \cong CSD$
Das Dreieck ASD ist kongruent zum Dreieck CSD.

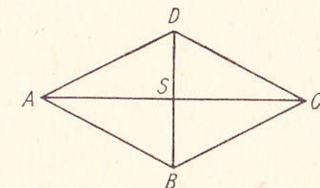


Abb. 4.22.

13. gleichliegende Seiten und gleichliegende Winkel kongruenter Dreiecke

Die Seiten und die Diagonalen eines Parallelogramms bilden kongruente Dreiecke.
1. Ergänzen Sie und lesen Sie dann!

$ABC \cong \ldots$
► $ABC \cong CDA$
Das Dreieck ABC ist kongruent zum Dreieck CDA.

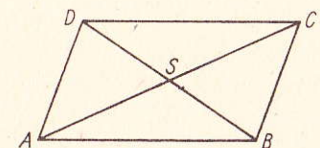


Abb. 4.23.

$ABS \cong \ldots$
$BCS \cong \ldots$
$ACD \cong \ldots$

$\overline{AD} \cong \ldots$
$\overline{BS} \cong \ldots$
$\sphericalangle BSA \cong \ldots$
$\sphericalangle CDB \cong \ldots$
$\sphericalangle CAB \cong \ldots$

2. Geben Sie alle Paare gleichliegender Seiten und Winkel der kongruenten Dreiecke ASD und CSB an!

► $\overline{AS}$ und $\overline{CS}$ sind gleichliegende Seiten der kongruenten Dreiecke ASD und CSB.

3. Begründen Sie die folgenden Aussagen!

$l(\overline{AS}) = l(\overline{CS})$

► Die Länge der Strecke $\overline{AS}$ ist gleich der Länge der Strecke $\overline{CS}$, weil $\overline{AS}$ und $\overline{CS}$ gleichliegende Seiten der kongruenten Dreiecke ABS und CDS sind.

$\sphericalangle_g ABD = \sphericalangle_g CDB$

► Die Größe des Winkels $\sphericalangle ABD$ ist gleich der Größe des Winkels $\sphericalangle CDB$, weil $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle CDB$ gleichliegende Winkel der kongruenten Dreiecke ABD und CDB sind.

$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle CDB$

► Die Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle CDB$ sind kongruent, weil $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle CDB$ gleichliegende Winkel der kongruenten Dreiecke ABD und CDB sind.

$l(\overline{BS}) = l(\overline{DS})$ $\qquad \sphericalangle_g ASD = \sphericalangle_g CSB$

$l(\overline{AD}) = l(\overline{CB})$ $\qquad \sphericalangle DSC \cong \sphericalangle BSA$

$\overline{AS} \cong \overline{CS}$ $\qquad \overline{BS} \cong \overline{DS}$

$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle CDA$ $\qquad \sphericalangle_g DAC = \sphericalangle_g BCA$

14. Größen ebener Figuren

Erklären Sie folgende Formeln!

$$A = \frac{gh_g}{2}$$

► A ist der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC.
g ist die Länge einer Dreiecksseite.
h_g ist die Länge der Höhe zur Dreiecksseite mit der Länge g.

1. $u = a + b + c$
2. $A = a^2$ (a-Quadrat)
3. $u = 4a$
4. $e = a\sqrt{2}$ (Quadratwurzel aus 2)
5. $A = ab$
6. $u = 2a + 2b$
7. $A = gh_g$
8. $A = \frac{a + c}{2} h$
9. $u = 2\pi r = \pi d$ (π (Pi) = 3,14 ...)
10. $A = \pi r^2$
11. $b = r \frac{\alpha\pi}{180°}$ (180 Grad)

15. Vergleichen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ mit dem Flächeninhalt des Parallelogramms $ABEF$!

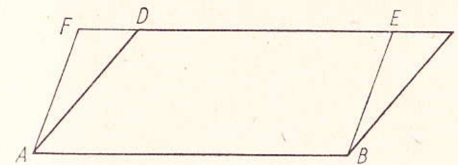


Abb. 4.24.

Begründen Sie das Ergebnis des Vergleiches!

16. gleichliegende Seiten und gleichliegende Winkel ähnlicher Dreiecke

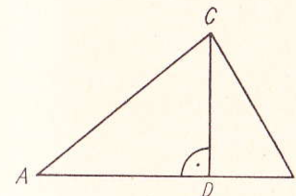


Abb. 4.25.

Das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel bei C.

1. Lesen Sie!

$ABC \sim ADC$; $\quad ADC \sim DBC$; $\quad ABC \sim DBC$

2. Ergänzen Sie die Tabelle!

ähnliche Dreiecke	ABC	ADC	DBC
gleichliegende Seiten	$\overline{AC}$	$\overline{AD}$	$\overline{DC}$
		$\overline{DC}$	
			$\overline{BC}$
gleichliegende Winkel	$\sphericalangle ABC$	$\sphericalangle DCA$	$\sphericalangle DBC$
	$\sphericalangle CAB$		
			$\sphericalangle CDB$

3. Nennen Sie mit Hilfe der Tabelle Paare gleichliegender Seiten und Winkel der ähnlichen Dreiecke!

► $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ sind gleichliegende Seiten der ähnlichen Dreiecke ABC und ADC.
$\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle DCA$ sind gleichliegende Winkel der ähnlichen Dreiecke ABC und ADC.

17. Betrachten Sie die ähnlichen Dreiecke ABC, ADC, DBC, und ergänzen Sie die folgenden Ausdrücke zu Proportionen!
Lesen Sie die Proportionen!

$a : c = h :$

► $a : c = h : b$
a zu c wie h zu b

1. $h : \quad = b : a$	4. $c : b = a :$
2. $b : q = \quad : h$	5. $a : p = b :$
3. $\quad : b = b : q$	6. $c : \quad = a : p$

18. Zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ sind ähnlich.
$a_1 = 2$ cm, $b_1 = 3$ cm und $c_1 = 4$ cm sind die Seitenlängen des Dreiecks $A_1B_1C_1$.
Wie lang sind die Seiten des Dreiecks $A_2B_2C_2$, wenn der Proportionalitätsfaktor $k = \frac{a_2}{a_1} = 3$ ist?

19. Zwei Strahlen h und k mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S werden von zwei Parallelen g_1 und g_2 geschnitten.

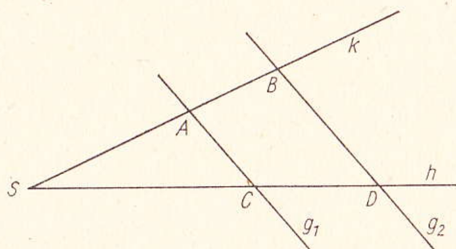


Abb. 4.26.

1. Es ist $l(\overline{SC}) = 3$ cm, $l(\overline{SA}) = 2$ cm, $l(\overline{SB}) = 5$ cm. Wie lang ist die Strecke $\overline{CD}$?
2. Bestimmen Sie den Wert des Verhältnisses $l(\overline{AC}) : l(\overline{BD})$!
3. Welche Bedeutung hat das Verhältnis $l(\overline{AC}) : l(\overline{BD})$ für die ähnlichen Dreiecke SCA und SDB?
4. Es ist $l(\overline{AC}) = 1{,}4$ cm. Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BD}$!

20. **... liegt symmetrisch zu ... bezüglich einer Geraden**

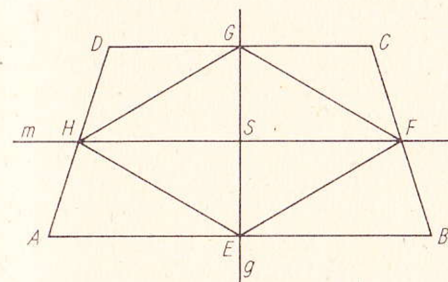


Abb. 4.27.

E, F, G und H sind die Mittelpunkte der Seiten des Trapezes $ABCD$, das genau ein Paar gleich langer Gegenseiten hat.
Das Viereck $EFGH$ ist ein Rhombus.
Formulieren Sie Aussagen über die Lage der Figuren!

$\overline{HE} \mid g$

► Die Strecke $\overline{HE}$ liegt symmetrisch zur Strecke $\overline{FE}$ bezüglich der Geraden g.

– $HES \mid m$	– $AESH$
– A	– EBF
– GFC	– $\overline{HD}$

21. Bei der Spiegelung an einer Geraden g erhält man zu einem Punkt P sein Bild P'.
21.1. Wo liegt P', wenn $P \notin g$?
21.2. Wo liegt P', wenn $P \in g$?

22. Auf einer Geraden t liegt ein Punkt A.
Ein Punkt $B \notin t$ ist das Bild von A bei der Spiegelung an einer Geraden g.
22.1. Beschreiben Sie die Lage der Spiegelgeraden g!
22.2. Beschreiben Sie die Lage der Geraden t und ihres Bildes t' bezüglich der Spiegelgeraden g!

23. Für zwei Punkte A, B und eine Gerade s gelten folgende Aussagen:
(a) $A \neq B$
(b) $A, B \notin s$
(c) $g_{AB} \perp s \wedge g_{AB} \nparallel s$
23.1. Formulieren Sie diese Aussagen in Worten!
23.2. Spiegeln Sie A und B an s! (Zeichnung)
23.3. Wie nennt man das Viereck mit den Eckpunkten A, B, A' und B'?

24. Erklären Sie, wie man bei der Spiegelung an einer Geraden das Bild eines Punktes P konstruiert!

25. … liegt symmetrisch zu … bezüglich …

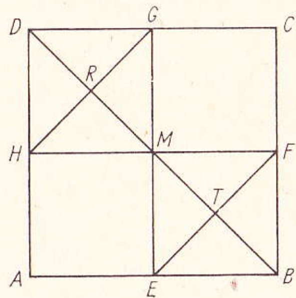


Abb. 4.28.

25.1. Betrachten Sie die Zeichnung, und ergänzen Sie die Tabelle!

B	liegt symmetrisch zu	*M*	bezüglich	*T*
D	– – – – – – –	*M*	– – – – – – –	
R	– – – – – – –		– – – – – – –	*M*
HMG	– – – – – – –	*FME*	– – – – – – –	
AEMH	– – – – – – –		– – – – – – –	*M*
ETM	– – – – – – –		– – – – – – –	*M*
HRD	– – – – – – –		– – – – – – –	*M*

25.2. Formulieren Sie mit Hilfe der Angaben in der Tabelle Aussagen über die Lage der Figuren!

► Der Punkt *B* liegt symmetrisch zum Punkt *M* bezüglich des Punktes *T*.

26. Der Punkt *B* liegt symmetrisch zum Punkt *A* bezüglich des Punktes *Z*. Wo liegt *Z*?

27. *ABCD* ist ein Viereck mit einem rechten Winkel bei *A*.

27.1. Spiegeln Sie das Viereck *ABCD* an seinem Eckpunkt *C*! (Zeichnung)

27.2. Beschreiben Sie die Lage des Vierecks *ABCD* und seines Bildes *A'B'C'D'* bezüglich des Punktes *C*!

28. Erklären Sie, wie man bei der Spiegelung an einem Punkt *Z* das Bild eines Punktes *P* konstruiert!

29. Für zwei Geraden *g*, *h* und einen Punkt *S* gelten folgende Aussagen:

(a) $g \neq h \wedge g \cap h \neq \emptyset$

(b) $g, h \not\ni S$

29.1. Formulieren Sie diese Aussagen in Worten!

29.2. Zeichnen Sie *g*, *h* und *S*!

29.3. Spiegeln Sie *g* und *h* an *S*!

29.4. Wie heißt die Figur, die von den Geraden *g*, *h* und ihren Bildern *g'*, *h'* begrenzt wird?

30. Formulieren Sie folgende Aussagen über Eigenschaften der Spiegelung an einer Geraden $g \subset \varepsilon$ in Worten!
Veranschaulichen Sie die Aussagen durch eine Zeichnung!

1. $\forall h \subset \varepsilon : (h \perp g \rightarrow h' = h)$
2. $\forall P \in g : P' = P$
3. $\forall P \notin g : (\{M\} = g \cap \overline{PP'} \rightarrow \overline{PM} \cong \overline{P'M})$
4. $\forall P \notin g : \overline{PP'} \perp g$
5. $\forall \overline{AB} \subset \varepsilon : \overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
6. $\forall \sphericalangle(h, k) \subset \varepsilon : \sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(h', k')$

31. Formulieren Sie folgende Aussagen über Eigenschaften der Spiegelung an einem Punkt $Z \in \varepsilon$ in Worten!
Veranschaulichen Sie die Aussagen durch eine Zeichnung!

1. $Z' = Z$
2. $\forall g \ni Z : g' = g$
3. $\forall P \in \varepsilon : (P \neq Z \rightarrow \overline{PZ} \cong \overline{P'Z'})$
4. $\forall P \in \varepsilon : (P \neq Z \rightarrow P' \in g_{PZ})$
5. $\forall g \subset \varepsilon : (g \not\ni Z \rightarrow g' \cap g = \emptyset)$
6. $\forall g \subset \varepsilon : g' \parallel g$
7. $\forall \overline{AB} \subset \varepsilon : \overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
8. $\forall \sphericalangle(h, k) \subset \varepsilon : \sphericalangle(h, k) \cong \sphericalangle(h', k')$

5. Definitionen von Eigenschaften

5.1. Aufbau und Formulierung der Definitionen von Eigenschaften

Bei der Definition einer Eigenschaft *E* eines Objektes *A* gibt man an, unter welcher Bedingung *B* das Objekt *A* die Eigenschaft *E* besitzt.

► Die Definition einer Eigenschaft hat somit folgende Form:

E, wenn *B*

Beispiel:

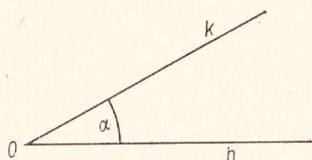


Abb. 5.1. Spitzer Winkel

■ Der Winkel $\sphericalangle(h, k)$ mit der Größe α besitzt die Eigenschaft E, daß er spitz ist.

Das bedeutet:

Die Winkelgröße erfüllt die Bedingung B, daß 0° (Grad) kleiner als α und α kleiner als 90° ist.

Wir definieren nun E mit Hilfe von B.

▶ **Def.:** Ein Winkel mit der Größe α ist spitz, wenn $0° < \alpha < 90°$ ist.

$$\underbrace{\text{der Größe } \alpha \text{ ist spitz,}}_{E} \quad \text{wenn} \quad \underbrace{0° < \alpha < 90°}_{B} \text{ ist.}$$

In der gleichen Weise kann man weitere Winkelarten bzw. deren Eigenschaften E definieren.

5.2. Winkelarten

Wir formulieren Bedingungen B für die Winkelgröße α. Mit Hilfe dieser Bedingungen definieren wir Eigenschaften E von Winkeln. Dabei erhalten wir eine Einteilung der Winkel nach ihrer Größe α in verschiedene Winkelarten.

▶ Winkelarten

E	*B*
$\sphericalangle$ (h, k) ist **spitz.** $\sphericalangle$ (h, k) ist ein spitzer Winkel.	$0° < \alpha < 90°$
$\sphericalangle$ (h, k) ist ein **rechter Winkel.**	$\alpha = 90°$
$\sphericalangle$ (h, k) ist **stumpf.** $\sphericalangle$ (h, k) ist ein stumpfer Winkel.	$90° < \alpha < 180°$

Fortsetzung folgende Seite

E	*B*
$\sphericalangle$ (h, k) ist ein **gestreckter Winkel.**	$\alpha = 180°$
$\sphericalangle$ (h, k) ist **überstumpf.** $\sphericalangle$ (h, k) ist ein überstumpfer Winkel.	$180° < \alpha < 360°$
$\sphericalangle$ (h, k) ist ein **Vollwinkel.**	$\alpha = 360°$

Tabelle 5.1. Winkelarten

5.3. Dreiecksarten

Man kann Dreiecke nach der Art ihrer Innenwinkel in drei verschiedene Dreiecksarten einteilen.

▶ Dreiecksarten
Einteilung der Dreiecke nach der Art ihrer Winkel

E	*B*
ABC ist **spitzwinklig.** *ABC* ist ein spitzwinkliges Dreieck.	Alle Winkel des Dreiecks *ABC* sind spitze Winkel.
ABC ist **rechtwinklig.** *ABC* ist ein rechtwinkliges Dreieck.	Ein Winkel des Dreiecks *ABC* ist ein rechter Winkel.
ABC ist **stumpfwinklig.** *ABC* ist ein stumpfwinkliges Dreieck.	Ein Winkel des Dreiecks *ABC* ist ein stumpfer Winkel.

Tabelle 5.2. Dreiecksarten

Man definiert z. B. die Eigenschaft, daß ein Dreieck spitzwinklig ist, folgendermaßen:

▶ **Def.:** Ein Dreieck ist spitzwinklig, wenn alle Winkel des Dreiecks spitze Winkel sind.

Anmerkung: In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die längste Seite Hypotenuse, die beiden anderen Seiten heißen Katheten.

Man teilt Dreiecke auch nach der Länge ihrer Seiten in verschiedene Dreiecksarten ein.

▶ **Dreiecksarten**
Einteilung der Dreiecke nach der Länge ihrer Seiten

E	*B*
ABC ist **unregelmäßig.** *ABC* ist ein unregelmäßiges Dreieck.	Alle Dreiecksseiten sind verschieden lang.
ABC ist **gleichschenklig.** *ABC* ist ein gleichschenkliges Dreieck.	Zwei Dreiecksseiten sind gleich lang.
ABC ist **gleichseitig.** *ABC* ist ein gleichseitiges Dreieck.	Alle Dreiecksseiten sind gleich lang.

Tabelle 5.3. Dreiecksarten

Man definiert z. B. die Eigenschaft eines Dreiecks, daß es gleichschenklig ist, folgendermaßen:

▶ **Def.:** Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei Dreiecksseiten gleich lang sind.

Anmerkung: In einem gleichschenkligen Dreieck heißen die gleich langen Seiten Schenkel, die dritte Seite heißt Basis. Die gleich langen Winkel heißen Basiswinkel, der dritte Winkel heißt Winkel an der Spitze.

5.4. Symmetrieeigenschaften von Figuren

5.4.1. Axialsymmetrie

Die Axialsymmetrie ist eine Eigenschaft von Figuren, die man mit Hilfe der Spiegelung an einer Geraden g definieren kann.

▶ **Def.:** Eine Figur F ist axialsymmetrisch bezüglich einer Geraden g, wenn bei der Spiegelung an g das Bild von F gleich F ist (in Zeichen: $F' = F$). Die Gerade g heißt Symmetrieachse von F.

Es ist z. B. jeder Winkel $\sphericalangle(h, k)$ axialsymmetrisch bezüglich seiner Winkelhalbierenden w.

Zu jedem Punkt $P \in \sphericalangle(h, k)$ gibt es genau einen Punkt $P' \in \sphericalangle(h, k)$, so daß folgende Symmetrierelation gilt:

Die Punkte P und P' liegen symmetrisch bezüglich der Geraden w.

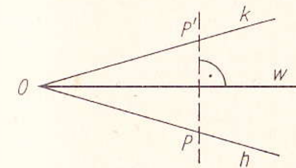


Abb. 5.2. Axialsymmetrie eines Winkels

Das bedeutet:

Bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden w von $\sphericalangle(h, k)$ ist der Winkel $\sphericalangle(h, k)$ gleich seinem Bild $\sphericalangle(h', k')$.

Deshalb ist jeder Winkel axialsymmetrisch bezüglich seiner Winkelhalbierenden w. Axialsymmetrisch sind auch alle gleichschenkligen Dreiecke.

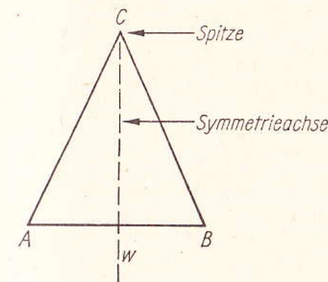


Abb. 5.3. Axialsymmetrie eines gleichschenkligen Dreiecks

Jedes gleichschenklige Dreieck ist axialsymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels an der Spitze. Eine echte Teilmenge der Menge aller gleichschenkligen Dreiecke ist die Menge aller gleichseitigen Dreiecke. Jedes gleichseitige Dreieck ist axialsymmetrisch bezüglich jeder Winkelhalbierenden des Dreiecks.

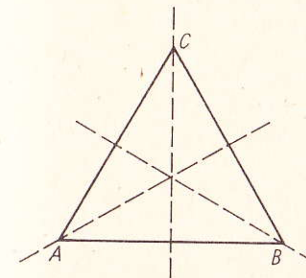


Abb. 5.4. Axialsymmetrie eines gleichseitigen Dreiecks

Beim gleichseitigen Dreieck ist jede der drei Symmetrieachsen zugleich Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte und Höhe des Dreiecks.
Zu den axialsymmetrischen Figuren gehören auch verschiedene Vierecksarten.

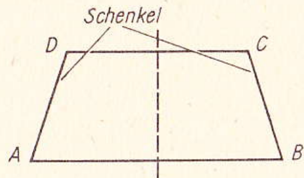
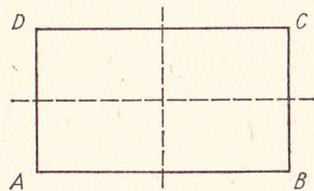
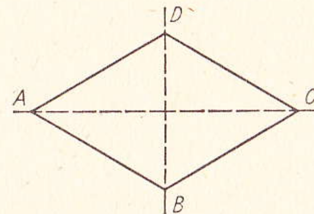
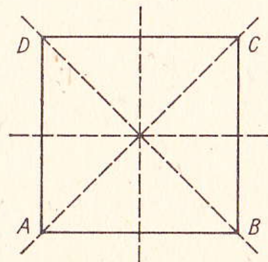
Vierecksart	Axialsymmetrie
das gleichschenklige Trapez  Die Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang.	axialsymmetrisch bezüglich der gemeinsamen Mittelsenkrechten der beiden parallelen Seiten
das Rechteck 	axialsymmetrisch bezüglich der beiden Mittelsenkrechten der Seiten
der Rhombus 	axialsymmetrisch bezüglich der beiden Winkelhalbierenden bzw. der Diagonalen
das Quadrat 	axialsymmetrisch bezüglich – der beiden Mittelsenkrechten der Seiten – der beiden Winkelhalbierenden bzw. der Diagonalen

Tabelle 5.4. Axialsymmetrische Vierecke

Ein Quadrat ist ein Viereck, das ein Rechteck und ein Rhombus ist. Es besitzt sowohl die Symmetrieeigenschaften des Rechtecks als auch die Symmetrieeigenschaften des Rhombus.

5.4.2. Zentralsymmetrie

Eine weitere Symmetrieeigenschaft von Figuren ist die Zentralsymmetrie. Man definiert sie mit Hilfe der Spiegelung an einem Punkt Z.

> ▶ **Def.:** Eine Figur F ist zentralsymmetrisch bezüglich eines Punktes Z, wenn bei der Spiegelung an Z das Bild von F gleich F ist (in Zeichen: $F' = F$).
> Der Punkt Z heißt Symmetriezentrum von F.

Es ist z. B. jedes Parallelogramm $ABCD$ zentralsymmetrisch bezüglich des Schnittpunktes Z seiner Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

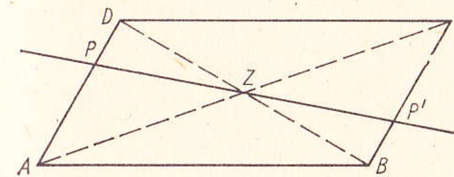


Abb. 5.5. Zentralsymmetrie eines Parallelogramms

Zu jedem Punkt $P \in ABCD$ gibt es genau einen Punkt $P' \in ABCD$, so daß folgende Symmetrierelation gilt:

Die Punkte P und P' liegen symmetrisch bezüglich des Punktes Z.

Das bedeutet:

Bei der Spiegelung am Diagonalenschnittpunkt Z eines Parallelogramms $ABCD$ ist das Bild des Parallelogramms gleich dem Parallelogramm (in Zeichen: $A'B'C'D' = ABCD$).

Deshalb ist jedes Parallelogramm zentralsymmetrisch bezüglich seines Diagonalenschnittpunktes.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie definiert man eine Eigenschaft einer Figur?
2. Unter welcher Bedingung ist ein Winkel mit der Größe α spitz?
3. Welche Winkelarten unterscheidet man?
4. Welche Dreiecksarten erhält man, wenn man die Dreiecke nach der Art ihrer Innenwinkel einteilt?
5. Wie heißt die längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks?
6. Wie nennt man zwei Seiten eines Dreiecks, die einen rechten Winkel bilden?

7. Welche Dreiecksarten erhält man, wenn man die Dreiecke nach der Länge der Dreiecksseiten einteilt?
8. Zu welcher Winkelart gehören die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks?
9. Unter welcher Bedingung nennt man eine Figur F axialsymmetrisch bezüglich einer Geraden g?
10. Warum ist die Winkelhalbierende w eines Winkels die Symmetrieachse des Winkels?
11. Welche Dreiecke besitzen eine Symmetrieachse?
12. Welche Dreiecke besitzen drei Symmetrieachsen?
13. Welche Vierecke haben zwei Symmetrieachsen?
14. Bei welchen Vierecken sind die Winkelhalbierenden der Innenwinkel gleichzeitig Symmetrieachsen?
15. Unter welcher Bedingung ist eine Figur F zentralsymmetrisch bezüglich eines Punktes Z?
16. Welche Vierecke sind zentralsymmetrisch?
17. Welcher Punkt ist Symmetriezentrum eines Parallelogramms?
18. Welche Vierecke haben vier Symmetrieachsen und ein Symmetriezentrum?

Aufgaben

1. Definieren Sie folgende Winkelarten!
1. der rechte Winkel
2. der stumpfe Winkel
3. der gestreckte Winkel

2. Füllen Sie die Tabelle aus!

Winkelgröße	Winkelart	Winkelgröße	Winkelart
72°	spitz	180°	
140°		90°	
210°		1°	
36°		360°	
96°		101°	

3. Definieren Sie folgende Dreiecksarten!
1. das gleichschenklige Dreieck
2. das gleichseitige Dreieck
3. das spitzwinklige Dreieck
4. das rechtwinklige Dreieck
5. das stumpfwinklige Dreieck
6. das unregelmäßige Dreieck

4. Dreiecksarten

Dreiecksart	unregelmäßig	gleichschenklig	gleichseitig
spitzwinklig	×		
rechtwinklig			nicht möglich
stumpfwinklig			

4.1. Kennzeichnen Sie in der Tabelle die Eigenschaften, die ein Dreieck gleichzeitig besitzen kann!
4.2. Welche Dreiecksarten gibt es?

► Es gibt spitzwinklig-unregelmäßige Dreiecke.

5. Welche Eigenschaften besitzt das Dreieck bezüglich der Länge seiner Seiten und der Größe seiner Innenwinkel?

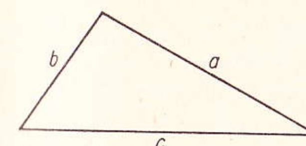


Abb. 5.6.

► Das Dreieck ist unregelmäßig und stumpfwinklig.

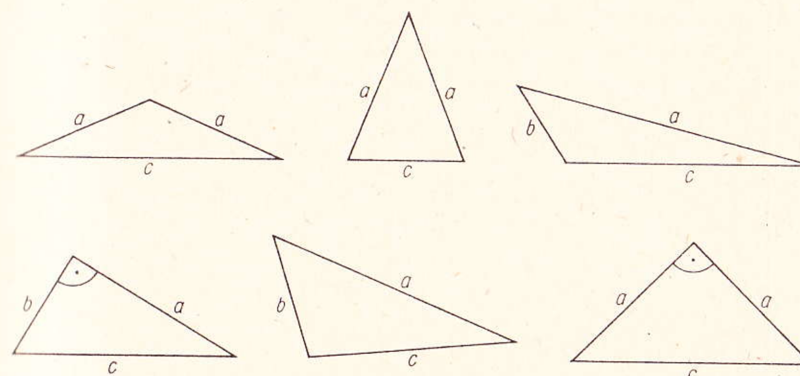


Abb. 5.7.

6. Antworten Sie!
6.1. Wieviel spitze Winkel muß ein Dreieck mindestens haben?
6.2. Wieviel spitze Winkel kann ein Dreieck höchstens haben?
6.3. Wieviel stumpfe Winkel kann ein Dreieck höchstens haben?
6.4. Wieviel rechte Winkel kann ein Dreieck höchstens haben?

7. Zeichnen Sie für die Menge aller Dreiecke ein Mengendiagramm, das die Einteilung der Dreiecke nach der Art der Dreieckswinkel zeigt!

8. Zeichnen Sie für die Menge aller Dreiecke ein Mengendiagramm, das die Einteilung der Dreiecke nach der Länge der Seiten darstellt!

9. Definieren Sie Eigenschaften E von Figuren F mit Hilfe der Angaben in der Tabelle! Formulieren Sie die Definitionen in Worten!

E	B
linear	$\exists g : F \subseteq g$
eben	$\exists \varepsilon : F \subseteq \varepsilon \wedge \sim\exists g : F \subseteq g$
räumlich	$\sim\exists \varepsilon : F \subseteq \varepsilon$

10. axialsymmetrisch sein bezüglich G

Winkel

► Ein Winkel ist axialsymmetrisch bezüglich seiner Winkelhalbierenden.

1. Strecke
2. Rhombus
3. gleichseitiges Dreieck
4. Kreis
5. Rechteck
6. gleichschenkliges Dreieck
7. Quadrat
8. gleichschenkliges Trapez

11. Die gezeichneten Figuren besitzen Symmetrieachsen.

11.1. Zeichnen Sie die Symmetrieachsen jeder Figur!

11.2. Geben Sie an, wieviel Symmetrieachsen jede Figur besitzt!

► (a)

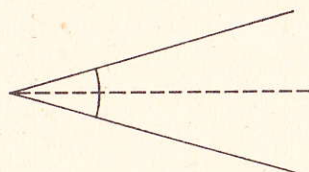


Abb. 5.8.

(b) Ein Winkel besitzt genau eine Symmetrieachse.

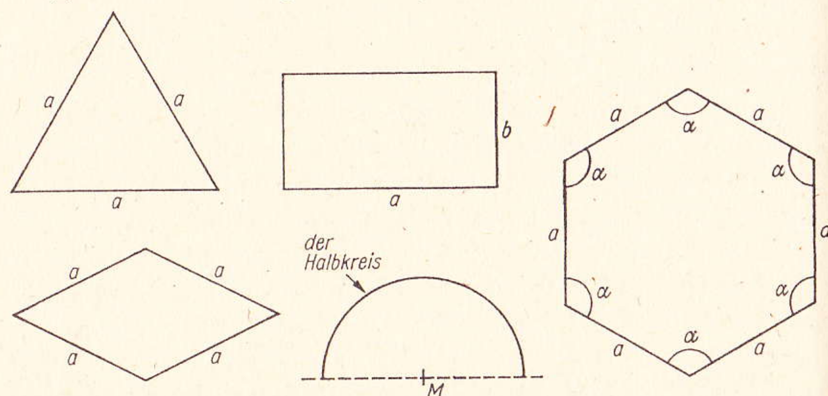


Abb. 5.9.

12. Beantworten Sie folgende Fragen!

12.1. Welche Geraden sind Symmetrieachsen eines Kreises $k(M; r)$?

12.2. Welche Geraden sind Symmetrieachsen einer Geraden g?

12.3. Welche Gerade ist in der Ebene ε Symmetrieachse einer Strecke $\overline{AB} \subset \varepsilon$?

12.4. Wieviel Symmetrieachsen gibt es im Raum zu einer Strecke $\overline{AB}$?

13. Auf einem Kreis $k(M; r)$ liegen zwei verschiedene Punkte P und Q. Q ist das Bild von P bei einer Spiegelung an einer Geraden g.

13.1. Beschreiben Sie die Lage von g bezüglich $\overline{PQ}$!

13.2. Beschreiben Sie die Lage von g bezüglich des Kreises k!

13.3. Was wissen Sie über das Bild von k bei einer Spiegelung an g?

14. zentralsymmetrisch sein bezüglich G

Strecke / Mittelpunkt der Strecke

► Eine Strecke ist zentralsymmetrisch bezüglich ihres Mittelpunktes.

1. Kreis / Mittelpunkt des Kreises
2. Rhombus / Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus
3. regelmäßiges 6-Eck / Mittelpunkt des regelmäßigen 6-Ecks
4. Gerade / beliebiger Punkt der Geraden

15. Sprechen Sie über die Symmetrieeigenschaften der Parallelogrammarten!

16. Formulieren Sie Aussagen, die bei der Spiegelung am Diagonalenschnittpunkt Z eines Parallelogramms $ABCD$ gelten!

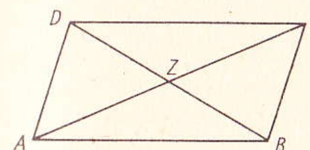


Abb. 5.10.

A'

► (1) $A' = C$

(2) Das Bild von A ist C.

(3) Der Punkt A wird auf den Punkt C abgebildet.

1. D'
2. $\overline{A'Z'}$
3. $\measuredangle A'Z'D'$
4. $\overline{A'B'}$
5. $B'C'Z'$
6. $A'B'C'D'$

17. Beantworten Sie die Fragen!

17.1. An welcher Seite muß man ein gleichschenkliges Dreieck ABC spiegeln, so daß das Dreieck ABC und sein Bild einen Rhombus bilden?

17.2. An welchem Punkt $P \in ABC$ muß man ein gleichschenkliges Dreieck ABC spiegeln, so daß ABC und sein Bild einen Rhombus bilden?

17.3. Ein unregelmäßiges Dreieck ABC wird am Mittelpunkt einer seiner Seiten gespiegelt.
Was für eine Figur bilden ABC und sein Bild $A'B'C'$?

17.4. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC wird bei einer Spiegelung auf ein Dreieck $A'B'C'$ abgebildet, so daß ABC und $A'B'C'$ ein Rechteck bilden.
Was wissen Sie über diese Spiegelung?

6. Aussagen

6.1. Begriff der Aussage

Beispiele für mathematische Aussagen:

(1)

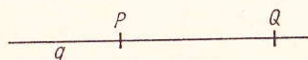


Abb. 6.1.

Wenn P und Q zwei verschiedene Punkte sind, so gibt es genau eine Gerade g, so daß g durch P und Q geht.
In Zeichen: $P \neq Q \rightarrow \exists!!\, g : g \ni P, Q$
Beachten Sie den Unterschied zwischen den Zeichen

„∃ (Es gibt ein(e) ...)“ und
„∃!! (Es gibt genau ein(e) ...)“!

(2) Jedes Parallelogramm ist zentralsymmetrisch bezüglich des Schnittpunktes seiner Diagonalen.

(3)

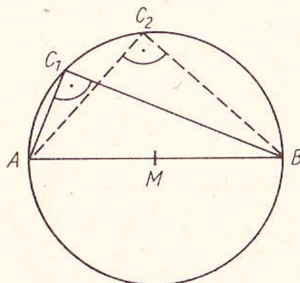


Abb. 6.2.

Jeder Peripheriewinkel über einem Halbkreis ist ein rechter Winkel.

(4) Wenn ein Radius $\overline{AM}$ eines Kreises $k(M; r)$ senkrecht auf einer Geraden $t \ni A$ steht, so ist die Gerade t Tangente an k im Punkt A.

(5) Wenn zwei Dreiecke in den Größen der Innenwinkel übereinstimmen, so sind sie ähnlich.

(6) In jedem Parallelogramm stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht (falsch).

Diese Beispiele für Aussagen zeigen:

a) Man formuliert Aussagen mit Hilfe von Grundbegriffen (Bsp. 1) und definierten Begriffen.

b) Man formuliert mathematische Aussagen über
- Eigenschaften mathematischer Objekte (Bsp. 2, 3) und
- Relationen zwischen mathematischen Objekten (Bsp. 1, 4, 5, 6)

c) Es gibt wahre Aussagen (Bsp. 1 bis 5) und falsche Aussagen (Bsp. 6).

Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch. Das ist eine charakteristische Eigenschaft von Aussagen. Durch diese Eigenschaft unterscheiden sich die Aussagen von den Definitionen. In einer Definition wird festgelegt, was man unter einem Begriff versteht. Definitionen sind Festlegungen. Deshalb sind sie weder wahr noch falsch.
Auch ein solcher mathematischer Ausdruck wie z. B. $2x = 8$ ist keine Aussage, denn dieser Ausdruck ist weder wahr noch falsch.
Jede wahre Aussage einer mathematischen Theorie ist in dieser Theorie entweder ein Axiom oder ein Satz.

Das bedeutet:

■ Die Menge aller wahren Aussagen einer Theorie besteht aus einer Menge von Axiomen und einer Menge von Sätzen.

Ein Beispiel für ein Axiom ist die Aussage (1). Die Aussagen (2) bis (5) sind Sätze. Die Aussage (6) ist falsch und deshalb weder ein Satz noch ein Axiom.

6.2. Axiome

Grundbegriffe einer Theorie definiert man nicht. Man kann sie aber mit Hilfe von Aussagen charakterisieren. Aussagen über Grundbegriffe nennt man Grundaussagen oder Axiome. Grundbegriffe und Axiome stehen am Anfang einer mathematischen Theorie und bilden die Basis für den logischen Aufbau dieser Theorie.

▸ **Def.:** Unter einem Axiom verstehen wir eine Aussage über Grundbegriffe einer Theorie, die in dieser Theorie am Anfang steht und als wahr angenommen wird.

Wenn man eine Aussage in einer Theorie als Axiom benutzt, so beweist man sie in dieser Theorie nicht.

Die euklidische Geometrie, mit der wir uns beschäftigen, ist nur eine der Geometrien, die es gibt. Sie ist nach dem bedeutenden griechischen Mathematiker Euklid benannt. Euklid lebte um 300 vor unserer Zeitrechnung und gilt als „Vater der Geometrie". Er faßte die geometrischen Erkenntnisse seiner Zeit zusammen, erweiterte sie und baute die Geometrie auf der Basis weniger Begriffe und Grundaussagen auf.
Ein wichtiges Axiom der euklidischen Geometrie ist das Parallelenaxiom:

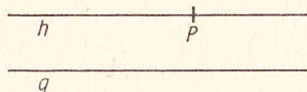


Abb. 6.3. Zum Parallelenaxiom

■ Wenn der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt, so gibt es genau eine Gerade h, so daß h durch P geht und parallel zu g ist.
In Zeichen: $P \notin g \rightarrow \exists!!\, h : h \ni P \wedge h \parallel g$

Es gibt geometrische Theorien, die dieses Parallelenaxiom nicht benutzen. Deshalb ist dieses Axiom für die euklidische Geometrie charakteristisch.

6.3. Sätze

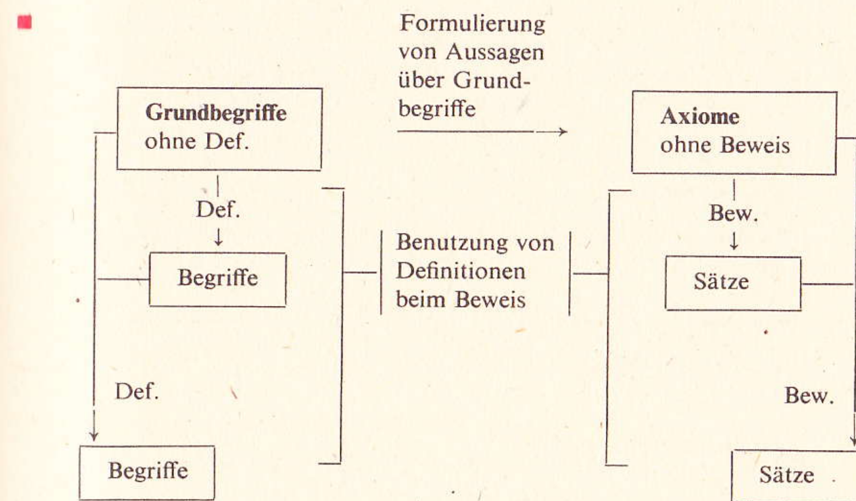
▶ **Def.:** Ein (Lehr-) Satz ist eine wahre Aussage einer Theorie, die man mit Axiomen der Theorie oder bereits bewiesenen Sätzen beweist.

Beim Beweis eines Satzes benutzt man außer Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen auch Definitionen.
Somit können wir den logischen Aufbau einer mathematischen Theorie folgendermaßen beschreiben:

Grundbegriffe und Axiome bilden zusammen die Basis für den logischen Aufbau der Theorie.
Die Grundbegriffe der Theorie definiert man nicht.

Die Axiome der Theorie sind Aussagen über Grundbegriffe der Theorie, die in der Theorie als wahr angenommen werden. Aussagen, die für eine Theorie Axiome sind, beweist man in dieser Theorie nicht.
Aus den Grundbegriffen bzw. Grundbegriffen und bereits definierten Begriffen leitet man durch Definition weitere Begriffe der Theorie logisch ab.
Aus den Axiomen bzw. Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen leitet man durch Beweis weitere Sätze der Theorie ab. Beim Beweisen von Sätzen benutzt man auch Definitionen.

■



6.3.1. Kongruenzsätze für Dreiecke

Die Kongruenzsätze geben an, unter welchen Bedingungen zwei Dreiecke kongruent sind.

■ **Kongruenzsatz sws**

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und in der Größe des Winkels übereinstimmen, der von den beiden Seiten eingeschlossen wird.

■ **Kongruenzsatz wsw**

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge einer Seite und in den Größen von zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

■ **Kongruenzsatz sss**

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen der drei Seiten übereinstimmen.

■ **Kongruenzsatz sSW**

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und in der Größe des Winkels übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt.

Ein Dreieck ist bereits durch Angabe von drei Stücken (Seiten bzw. Winkel), die in den Kongruenzsätzen genannt werden, bis auf seine Lage eindeutig bestimmt. Das ist für die Konstruktion von Dreiecken wichtig.
Die Konstruktion eines Dreiecks soll eindeutig ausführbar sein. Sie ist eindeutig ausführbar, wenn die gegebenen Stücke einem der Kongruenzsätze entsprechen.

6.3.2. Sätze über rechtwinklige Dreiecke

Von besonderer Bedeutung für die Anwendung der Geometrie in der Praxis sind die rechtwinkligen Dreiecke. Deshalb sind die folgenden Sätze über rechtwinklige Dreiecke sehr wichtig.

▶ **Satz des Pythagoras**

Für alle rechtwinkligen Dreiecke mit der Hypotenusenlänge c und den Kathetenlängen a und b gilt: $c^2 = a^2 + b^2$

▶ **Höhensatz**

Für alle rechtwinkligen Dreiecke gilt:

$h^2 = p \cdot q$

h ist die Länge der Höhe auf die Hypotenuse.
p und q sind die Längen der Hypotenusenabschnitte.

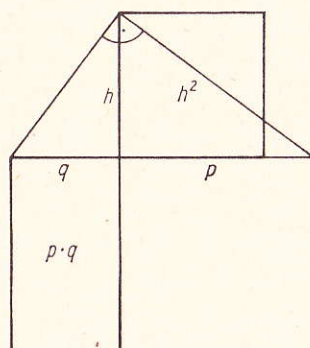


Abb. 6.4.

▶ **Kathetensatz**

Für alle rechtwinkligen Dreiecke gilt:
$a^2 = c \cdot p$
$b^2 = c \cdot q$

a und b sind die Längen der Katheten.
c ist die Länge der Hypotenuse.
p und q sind die Längen der Hypotenusenabschnitte.

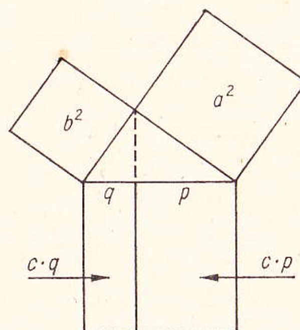


Abb. 6.5.

6.3.3. Sätze über Winkel

Oft benutzt man bei Beweisen Sätze über Winkel.

■ **Nebenwinkel**

Wenn zwei Winkel Nebenwinkel sind, so beträgt die Summe ihrer Winkelgrößen 180°.

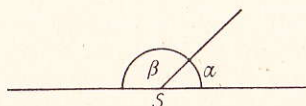


Abb. 6.6.

■ **Scheitelwinkel**

Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, so sind sie kongruent.

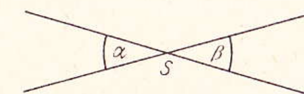


Abb. 6.7.

■ **Stufenwinkel an Parallelen**

Wenn zwei Winkel Stufenwinkel an Parallelen sind, so sind sie kongruent.

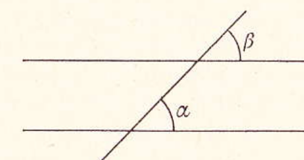


Abb. 6.8.

■ **Wechselwinkel an Parallelen**

Wenn zwei Winkel Wechselwinkel an Parallelen sind, so sind sie kongruent.

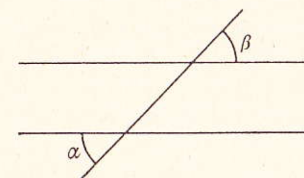


Abb. 6.9.

■ **Zentriwinkel – Peripheriewinkel**

Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen.

$\alpha = 2\beta$

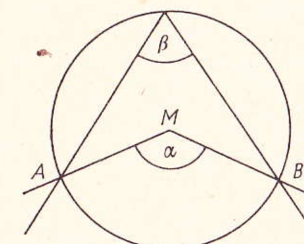


Abb. 6.10

■ **Peripheriewinkel**

Alle Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen sind gleich groß.

$\alpha = \beta = \gamma = \ldots$

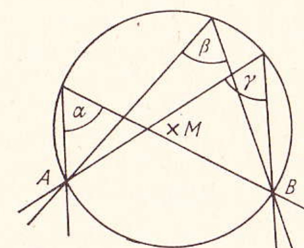


Abb. 6.11.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welcher Unterschied besteht zwischen Definitionen und Aussagen?
2. Was ist die charakteristische Eigenschaft einer Aussage?
3. Warum ist der Ausdruck $2 \cdot a \neq 4$ keine Aussage?
4. Gibt es einen Oberbegriff zu dem Begriff Axiom? Welchen?
5. Welche zwei Arten wahrer Aussagen einer Theorie unterscheidet man?
6. Was versteht man unter einem Axiom?
7. Wie heißt das Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie?
8. Was wissen Sie über Euklid?
9. Was versteht man unter einem (Lehr-) Satz?
10. Welcher Unterschied besteht zwischen einem Axiom und einem Satz?
11. Was benutzt man beim Beweis von Sätzen?
12. Welche Bedeutung haben Grundbegriffe und Axiome beim logischen Aufbau einer mathematischen Theorie?
13. Unter welcher Bedingung ist die Konstruktion eines Dreiecks eindeutig ausführbar?
14. Was versteht man unter den Stücken eines Dreiecks?
15. Welche drei Sätze gelten für rechtwinklige Dreiecke?
16. Unter welcher Bedingung sind zwei Dreiecke kongruent?
17. Unter welcher Bedingung ist ein Peripheriewinkel eines Kreises ein rechter Winkel?
18. Welcher Satz gilt für Stufenwinkel an Parallelen?
19. Welche Relation besteht zwischen der Tangente t an einem Kreis $k(M; r)$ im Punkte A und dem Berührungsradius $\overline{AM}$?
20. Welche Relation gilt für die Winkelgrößen eines Zentriwinkels und der Peripheriewinkel über demselben Bogen?

Aufgaben

1. wahre und falsche Aussagen

Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!
Korrigieren Sie die falschen Aussagen!
Alle Dreiecke haben zwei spitze Winkel.
► Die Aussage ist wahr.
Es gibt gleichseitige Dreiecke, die einen rechten Winkel haben.
► Die Aussage ist falsch.
Es gibt keine gleichseitigen Dreiecke, die einen rechten Winkel haben.

1. Es gibt Figuren, die beliebig viele Symmetrieachsen haben.
2. Jedes gleichschenklige Dreieck hat genau einen spitzen Winkel.
3. Jedes Rechteck ist ein Trapez.
4. In jedem Dreieck liegt der größeren Seite von zwei Seiten der kleinere Winkel gegenüber.
5. Wenn ein Dreieck stumpfwinklig ist, so ist es nicht gleichseitig.
6. Die Diagonalen eines Parallelogramms sind gleich lang.

7. Die Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks sind gleich groß.
8. Für jedes Dreieck ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.
9. Jedes gleichseitige Dreieck ist zentralsymmetrisch bezüglich des Schnittpunktes seiner Winkelhalbierenden.

2. Formulieren Sie folgende Axiome in Worten!
Veranschaulichen Sie die Axiome 1., 4. und 5. durch eine Zeichnung!

1. $A \neq B \rightarrow \exists!!\, g : g \ni A, B$
2. $\varepsilon \cap \eta \neq \emptyset \rightarrow \exists\, g : g \subset \varepsilon, \eta$
3. $\sim \exists\, g : g \ni P, Q, R \rightarrow \exists!!\, \varepsilon : \varepsilon \ni P, Q, R$
4. $P \in g \rightarrow \exists\, A, B \in g : P \in AB$
5. $A \notin g \rightarrow \exists!!\, h : h \ni A \wedge h \parallel g$
6. $P, Q \in g, \varepsilon \wedge P \neq Q \rightarrow g \subset \varepsilon$

3. Sprechen Sie über den logischen Aufbau einer mathematischen Theorie!

4. Formulieren Sie mit den Aussagen A und B Sätze der Form „Wenn A, so B“ bzw. „Wenn B, so A“.
A: Ein Dreieck ist gleichschenklig.
B: Ein Dreieck ist gleichseitig.
► Wenn **ein** Dreieck gleichseitig ist, so ist **das** Dreieck gleichschenklig.

1. A: Ein Parallelogramm ist ein Quadrat.
   B: Die Diagonalen eines Parallelogramms sind gleich lang.
2. A: Die Diagonalen eines Vierecks halbieren einander.
   B: Ein Viereck ist ein Rhombus.
3. A: Ein Viereck ist ein Rechteck.
   B: Die Gegenseiten eines Vierecks sind gleich lang.
4. A: Zwei Gegenwinkel eines Vierecks sind gleich groß.
   B: Ein Viereck ist ein Parallelogramm.
5. A: Ein Viereck ist ein Rhombus.
   B: Ein Viereck ist zentralsymmetrisch bezüglich des Schnittpunktes seiner Diagonalen.
6. A: Ein Parallelogramm ist ein Quadrat.
   B: Die Diagonalen eines Parallelogramms stehen senkrecht aufeinander.
7. A: Die Diagonalen eines Vierecks sind gleich lang.
   B: Ein Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez.
8. A: Die Abstände eines Punktes P von zwei Punkten A und B sind gleich.
   B: Ein Punkt P ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
9. A: Eine Figur ist ein regelmäßiges n-Eck.
   B: Eine Figur hat mindestens drei Symmetrieachsen.
10. A: Ein Dreieck ist axialsymmetrisch.
    B: Ein Dreieck ist gleichseitig.

5. Vergleichen Sie die Begriffe „Definition“ und „Satz“!

6. überein/stimmen in D

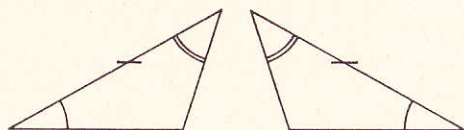


Abb. 6.12.

► Die Dreiecke stimmen in der Länge einer Seite und in den Größen von zwei gleichliegenden Winkeln überein.

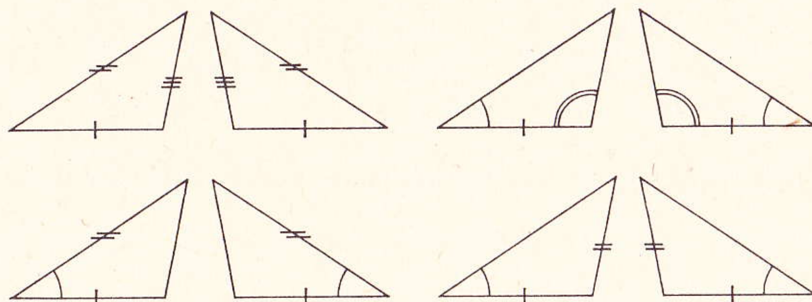


Abb. 6.13.

7. Unter welcher Bedingung sind folgende Dreiecke kongruent?

1. zwei gleichseitige Dreiecke
2. zwei gleichschenklige Dreiecke
3. zwei rechtwinklige Dreiecke
4. zwei rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke

8. eindeutig ausführbar sein

Begründen Sie, warum die Konstruktion eines Dreiecks *ABC* aus den gegebenen Stücken eindeutig ausführbar ist!

$a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $\gamma = 30°$

► Es sind die Längen von zwei Seiten und die Größe des Winkels gegeben, der von den beiden Seiten eingeschlossen wird.
Deshalb ist nach dem Kongruenzsatz *sws* die Konstruktion des Dreiecks eindeutig ausführbar.

1. $a = 5$ cm; $b = 6$ cm; $c = 4$ cm
2. $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $\beta = 50°$
3. $b = 5$ cm; $c = 6$ cm; $\alpha = 40°$
4. $c = 6$ cm; $\alpha = 42°$; $\beta = 55°$
5. $b = 5$ cm; $c = 6$ cm; $\gamma = 60°$

9. Warum ist die Konstruktion eines Dreiecks mit den gegebenen Seitenlängen und Winkelgrößen nicht ausführbar bzw. nicht eindeutig ausführbar?

1. $a = 2$ cm; $b = 3$ cm; $c = 6$ cm
2. $b = 5$ cm; $c = 6$ cm; $\beta = 55°$
3. $a = 4$ cm; $\beta = 85°$; $\gamma = 98°$
4. $\alpha = 40°$; $\beta = 50°$; $\gamma = 90°$

10. Für ein rechtwinkliges Dreieck *ABC* gilt:

$a^2 + b^2 = c^2$; $a^2 = c \cdot p$; $b^2 = c \cdot q$; $h^2 = p \cdot q$

10.1. Lesen Sie die Formeln, die für das rechtwinklige Dreieck gelten!

10.2. Was bedeuten a, b, c, p, q, h in diesen Formeln?

11. Die Längen der Hypotenusenabschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks *ABC* mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ sind $p = q = 3$ cm.

11.1. Was für ein rechtwinkliges Dreieck ist *ABC*?

11.2. Wie groß ist der Abstand des Punktes *C* von $\overline{AB}$?

11.3. Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrats über der Dreiecksseite $\overline{AC}$?

11.4. Wie groß ist der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks *ABC*?

12. Für ein Dreieck *ABC* gelten folgende Aussagen:

(a) $\exists Q \in \overline{AB}: \overline{AQ} \cong \overline{AC}$

(b) $\measuredangle_g ACQ = 70°$

(c) $\measuredangle_g QCB = 30°$

12.1. Formulieren Sie die Aussagen in Worten!

12.2. Wie groß sind die Innenwinkel der Dreiecke *AQC*, *QBC* und *ABC*?

12.3. Welche Eigenschaften besitzen die Dreiecke *AQC*, *QBC* und *ABC*?

13. Beantworten Sie die Fragen!

13.1. Wie groß ist die Summe der Größen zweier Nebenwinkel?

13.2. Wieviel Nebenwinkel gibt es zu jedem Winkel?

13.3. Welche Relation besteht zwischen zwei Winkeln, die Nebenwinkel zu einem dritten Winkel sind?

13.4. Wie groß sind zwei Nebenwinkel, die kongruent sind?

13.5. Was wissen Sie über Stufenwinkel an Parallelen?

13.6. Unter welcher Bedingung sind zwei Wechselwinkel an zwei Geraden *g* und *h* kongruent?

14. Was wissen Sie über den Nebenwinkel mit der Größe β zum Winkel mit der Größe α?

$\alpha = 45°$

► Wenn α ein spitzer Winkel ist, so ist sein Nebenwinkel β ein stumpfer Winkel.

1. $\alpha = 100°$
2. $\alpha = 180°$
3. $\alpha = 90°$
4. $\alpha = 20°$

15. Beantworten Sie die Fragen!

15.1. Wieviel Peripheriewinkel gibt es über einem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$?

15.2. Wieviel Zentriwinkel gibt es über einem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$?

15.3. Was wissen Sie über Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen?

15.4. Wie groß ist jeder Peripheriewinkel über einem Halbkreis?

16. Gegeben sind ein Kreis $k(M; r)$ und ein Punkt P mit $l(\overline{MP}) > r$.

16.1. Was wissen Sie über die Lage des Punktes P bezüglich des Kreises k?

16.2. Wieviele Geraden t mit $t \ni P$ gibt es, die Tangenten des Kreises k sind?

16.3. Eine Tangente t des Kreises k mit $t \ni P$ berührt k in B. Wie bestimmt man den Punkt B?

17. Für zwei Geraden g, h und einen Kreis $k(M; r)$ gelten folgende Aussagen:

(a) $g \cap k = \{A; P\}$
(b) $h \cap k = \{A; Q\}$
(c) $h \perp g$

17.1. Formulieren Sie die Aussagen in Worten!

17.2. Skizzieren Sie g, h und k!

17.3. Formulieren Sie eine Aussage über $\overline{PQ}$!
Begründen Sie diese Aussage!

18. Betrachten Sie die Zeichnung, und beantworten Sie die Fragen! Begründen Sie die Antworten!

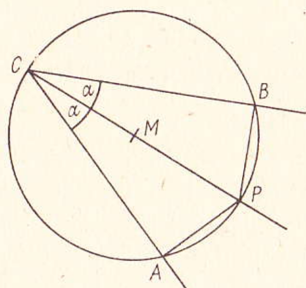


Abb. 6.14.

18.1. Welche Aussage gilt für die Längen der Sehnen $\overline{AP}$ und $\overline{PB}$?

18.2. Welche Aussage gilt für die Dreiecke APC und BPC?

7. Definitionen und Sätze für spezielle räumliche Figuren

7.1. Begriff des Körpers

Eine Teilmenge der Menge aller räumlichen Figuren bilden die geometrischen Körper. Sie sind Figuren, die allseitig von einer Fläche oder von mehreren zusammenhängenden Flächenstücken begrenzt werden.
Die Fläche bzw. die zusammenhängenden Flächenstücke, die einen Körper allseitig begrenzen, bezeichnet man als Oberfläche des Körpers.
Es ist im allgemeinen üblich, daß man für einen Körper und seine Oberfläche die gleichen Bezeichnungen verwendet. So bezeichnet man als Kugel mit dem Mittel-

punkt M und dem Radius r sowohl die Menge aller Punkte P des Raumes, die von M den gleichen Abstand $l(\overline{MP}) = r$ haben, als auch die Menge aller Punkte P des Raumes, die von M

Abstände $l(\overline{MP}) \leqq r$ haben.

7.2. Polyeder (Vielflächner)

7.2.1. Prismen

Spezielle Polyeder sind die Prismen. Sie bestehen wie alle Polyeder nur aus ebenen Flächenstücken.

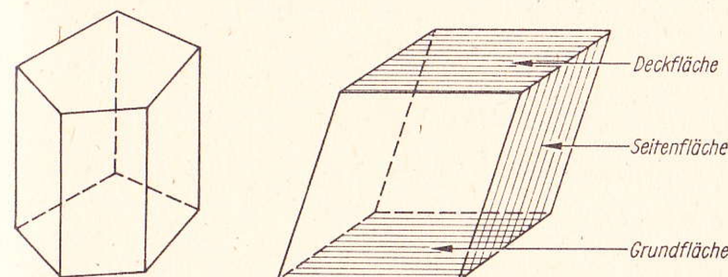


Abb. 7.1. Gerades und schiefes Prisma

> ▶ **Def.:** Ein Prisma ist ein Polyeder mit einem Paar kongruenter n-Ecksflächen in parallelen Ebenen und n Parallelogrammflächen.

Die kongruenten n-Ecksflächen, die in parallelen Ebenen liegen, heißen Grundfläche und Deckfläche des Prismas. Die n Parallelogrammflächen heißen Seitenflächen des Prismas. Die n Seitenflächen bilden den Mantel M des Prismas.

> ▶ **Def.:** Ein Prisma ist regelmäßig, wenn die Grundfläche des Prismas die Fläche eines regelmäßigen n-Ecks ist.
> Andernfalls ist das Prisma unregelmäßig.

> ▶ **Def.:** Ein Prisma ist gerade, wenn der Mantel des Prismas aus Rechtecksflächen besteht.
> Andernfalls ist das Prisma schief.

> ▶ **Def.:** Ein Prisma ist n-seitig, wenn der Mantel des Prismas aus n Seitenflächen besteht ($n \geqq 3$).

Zur Charakterisierung eines Prismas sind immer drei Angaben notwendig:

regelmäßig – unregelmäßig
gerade – schief
n-seitig

Ein Prisma kann z. B. ein regelmäßiges, schiefes, fünfseitiges Prisma sein. Spezielle Prismen sind der Quader und der Würfel.

▶ **Def.:** Ein Quader ist ein gerades Prisma mit einer Rechtecksfläche als Grundfläche.

■ *Satz:* Jeder Quader hat vier Raumdiagonalen.

■ *Satz:* Die Raumdiagonalen eines Quaders halbieren einander.

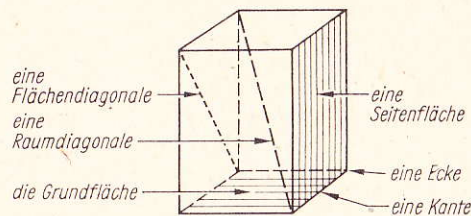


Abb. 7.2. Quader

Eine Teilmenge der Menge aller Quader ist die Menge der Würfel. Wie jeder Quader besitzt auch jeder Würfel eine Grund- und eine Deckfläche, 4 Seitenflächen (6 kongruente Flächen), 12 Kanten, 8 Ecken, 4 Raumdiagonalen und 12 Flächendiagonalen.

▶ **Def.:** Ein Würfel ist ein Quader, der aus Quadratflächen besteht.

Formeln zur Berechnung des Volumens V, des Oberflächeninhalts A_O und des Mantelflächeninhalts A_M eines Prismas sind folgende:

$$V = A_G h \qquad A_O = 2A_G + A_M \qquad A_M = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

A_G ist der Flächeninhalt der Grundfläche G des Prismas.
$S_1, S_2, \dots, S_n$ sind die Flächeninhalte der Seitenflächen des Prismas. Die Länge h einer Höhe des Prismas ist der Abstand von Grund- und Deckfläche des Prismas.
Die Formeln zur Berechnung von V, A_O und A_M gelten sowohl für gerade als auch für schiefe Prismen.

7.2.2. Pyramiden

Spezielle Polyeder sind auch die Pyramiden.



Abb. 7.3. Gerade und schiefe Pyramide

▶ **Def.:** Eine Pyramide ist ein Polyeder mit einer n-Ecksfläche als Grundfläche und n Dreiecksflächen als Mantel.

Die Seitenkanten einer Pyramide haben einen Punkt S gemeinsam. S ist die Spitze der Pyramide.
Zur Charakterisierung einer Pyramide ist wie bei einem Prisma die Angabe der folgenden Eigenschaften erforderlich:

regelmäßig – unregelmäßig
n-seitig
gerade – schief

Die beiden ersten Eigenschaften werden bei einer Pyramide in der gleichen Weise wie bei einem Prisma definiert.
Die Eigenschaft einer Pyramide, daß sie gerade ist, definiert man folgendermaßen:

▶ **Def.:** Eine Pyramide ist gerade, wenn der Mantel der Pyramide aus Flächen gleichschenkliger Dreiecke besteht. Anderenfalls ist die Pyramide schief.

Eine dreiseitige Pyramide heißt Tetraeder (griech. Vierflächner). Jede Dreiecksfläche eines Tetraeders kann als Grundfläche gewählt werden.

▶ **Def.:** Ein Tetraeder ist regulär, wenn alle Kanten des Tetraeders gleich lang sind.

Die Länge h der Höhe einer Pyramide ist gleich dem Abstand der Pyramidenspitze von der Ebene, in der die Grundfläche der Pyramide liegt.

■ *Satz:* Das Volumen jeder Pyramide mit dem Grundflächeninhalt A_G und der Höhenlänge h beträgt $V = \frac{1}{3} A_G h$.

7.2.3. Pyramidenstümpfe

Wenn eine Ebene ε eine Pyramide parallel zu ihrer Grundfläche schneidet, so entsteht ein Pyramidenstumpf.

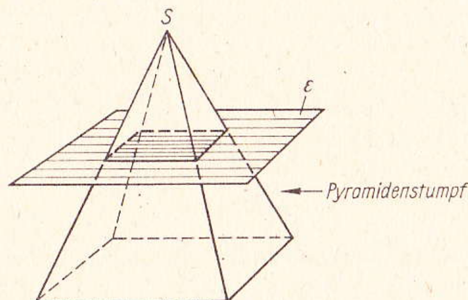


Abb. 7.4. Pyramidenstumpf

▶ **Def.:** Ein Pyramidenstumpf ist ein Polyeder mit zwei ähnlichen, aber nicht kongruenten n-Ecksflächen, die in parallelen Ebenen liegen, und n-Trapezflächen.

Die Länge h einer Höhe eines Pyramidenstumpfes ist gleich dem Abstand von Grund- und Deckfläche des Pyramidenstumpfes.

7.3. Krummflächige Figuren

Wichtige krummflächige Figuren sind der Kreiszylinder, der Kreiskegel und die Kugel. Man unterscheidet gerade und schiefe Kreiszylinder bzw. Kreiskegel.

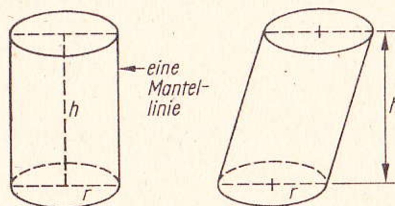


Abb. 7.5. Gerader und schiefer Kreiszylinder

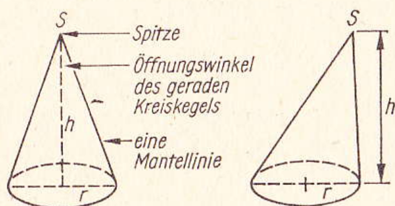


Abb. 7.6. Gerader und schiefer Kreiskegel

■ *Satz:* Die geraden Kreiszylinder, die geraden Kreiskegel und die Kugeln sind Rotationskörper bzw. Oberflächen von Rotationskörpern.

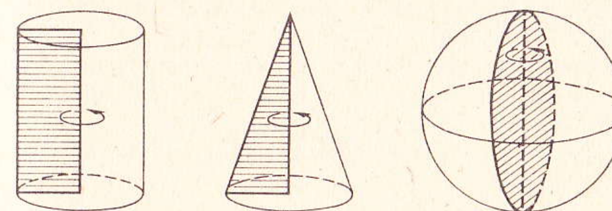


Abb. 7.7. Rotationskörper

Ein **gerader Kreiszylinder** entsteht bei der Rotation eines Rechtecks um eine Seite.

Ein **gerader Kreiskegel** entsteht bei der Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete.

Eine **Kugel** entsteht bei der Rotation eines Kreises um einen Durchmesser.

Wenn eine Ebene einen Kreiskegel parallel zu seiner Grundfläche schneidet, dann entsteht ein Kegelstumpf.

■ *Satz:* Jeder gerade Kreiskegelstumpf entsteht durch Rotation eines gleichschenkligen Trapezes um seine Symmetrieachse.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einem geometrischen Körper?
2. Wodurch wird ein Körper allseitig begrenzt?
3. Welche Eigenschaft besitzen die Flächenstücke, aus denen ein Polyeder besteht?
4. Welche Bedingungen erfüllen die Grund- und Deckfläche eines Prismas?
5. Was für Flächen bilden den Mantel eines Prismas?
6. Unter welcher Bedingung ist ein Prisma gerade?
7. Unter welcher Bedingung heißt ein Prisma fünfseitig?
8. Was wissen Sie über die Grundfläche eines regelmäßigen, dreiseitigen Prismas?
9. Wie nennt man ein Prisma, bei dem nicht alle Seitenflächen Rechteckflächen sind?
10. Was versteht man unter einem Quader?
11. Welche zwei Arten von Diagonalen eines Prismas unterscheidet man?
12. Warum ist jeder Würfel auch ein Quader?
13. Wie heißt der Abstand der Ebenen, in denen die Grund- bzw. Deckfläche eines Prismas liegen?
14. Aus welchen Größen berechnet man das Volumen eines Prismas?
15. Wie definiert man eine Pyramide?
16. Aus wieviel ebenen Flächenstücken besteht eine n-seitige Pyramide?
17. Unter welcher Bedingung ist eine Pyramide gerade?

18. Unter welcher Bedingung ist eine Pyramide ein reguläres Tetraeder?
19. Was wissen Sie über die Grundfläche einer regelmäßigen, 6-seitigen Pyramide?
20. Welche Relationen bestehen zwischen Grund- und Deckfläche eines Pyramidenstumpfes?
21. Was für Flächen bilden den Mantel eines geraden Pyramidenstumpfes?
22. Bei welchem krummflächig begrenzten Körper sind die Höhen und Mantellinien des Körpers parallel?
23. Bei welchem Körper haben alle Mantellinien einen gemeinsamen Punkt S und die gleiche Länge s?
Wie heißt der Punkt S?
24. Warum bezeichnet man einen geraden Kreiszylinder als Rotationskörper?
25. Welche räumliche Figur entsteht bei der Rotation eines Kreises $k(M; r)$ um einen seiner Durchmesser?
26. Welche räumliche Figur entsteht bei der Rotation einer Kreisfläche $k(M; r)$ um einen ihrer Durchmesser?
27. Wie heißt ein Kreiskegel, der kein Rotationskörper ist?
28. Wie entsteht durch Rotation ein gerader Kreiskegelstumpf?
29. Welcher Unterschied besteht bei einem Kreiskegelstumpf zwischen Grund- und Deckfläche?

Aufgaben

1. begrenzen A – begrenzt werden von D

Kreisfläche / Kreis
► Ein Kreis begrenzt eine Kreisfläche.
Jede Kreisfläche wird von einem Kreis begrenzt.

Dreiecksfläche / drei zusammenhängende Strecken
Strecke / zwei Punkte
Würfel / sechs zusammenhängende Quadratflächen
Kugel / genau eine Fläche
n-Ecksfläche / n zusammenhängende Strecken
Quader / sechs zusammenhängende Rechtecksflächen

2. bestehen aus D

ein regelmäßiges, gerades, vierseitiges Prisma
► Ein regelmäßiges, gerades, vierseitiges Prisma besteht aus zwei Quadratflächen und vier Rechtecksflächen.

ein regelmäßiges, schiefes, vierseitiges Prisma
ein unregelmäßiges, gerades, vierseitiges Prisma
ein regelmäßiges, gerades, dreiseitiges Prisma
ein unregelmäßiges, schiefes, dreiseitiges Prisma
ein regelmäßiges, gerades, sechsseitiges Prisma

3. Definieren Sie Eigenschaften von Prismen!

1. unregelmäßiges Prisma
2. schiefes Prisma

4. Formulieren Sie Sätze!

$V = a^3$
► Das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a beträgt $V = a^3$.

1. $V = abc$
2. $A_O = 6a^2$
3. $V = A_G h$ (A_G: Grundflächeninhalt; h: Höhenlänge)
4. $A_O = 2A_G + A_M$ (A_M: Mantelflächeninhalt)
5. $A_M = 4a^2$
6. $e = a\sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$: Quadratwurzel aus 3)
7. $f = a\sqrt{2}$

5. Definieren Sie Eigenschaften von Pyramiden!

1. regelmäßige Pyramide
2. n-seitige Pyramide
3. schiefe Pyramide
4. quadratische Pyramide
5. rechteckige Pyramide

6. Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!
Bilden Sie zu den falschen Aussagen entsprechende wahre Aussagen!

1. Alle schiefen Prismen haben Parallelogrammflächen als Seitenflächen.
2. Es gibt kein schiefes Prisma mit einer Rechtecksfläche als Seitenfläche.
3. Alle schiefen Prismen haben mindestens eine Seitenfläche, die eine Rechtecksfläche ist.
4. Bei jeder Pyramide besteht der Mantel aus Flächen gleichseitiger Dreiecke.
5. Jede schiefe Pyramide hat mindestens zwei verschieden lange Seitenkanten.
6. Es gibt keine schiefen Pyramiden mit zwei gleich langen Seitenkanten.
7. Bei jedem Pyramidenstumpf besteht der Mantel aus Flächen gleichschenkliger Trapeze.
8. Bei allen schiefen Pyramidenstümpfen sind alle Seitenkanten verschieden lang.

7. Beantworten Sie folgende Fragen!

7.1. Wo liegen alle Punkte einer Ebene ε, die von einem Punkt $M \in \varepsilon$ den gleichen Abstand r haben?

7.2. Wo liegen alle Punkte des Raumes, die von einem Punkt M den gleichen Abstand r haben?

7.3. Wo liegen alle Punkte des Raumes, die von einer Strecke $\overline{PQ}$ den gleichen Abstand r haben?

7.4. Wo liegen alle Kreise $k(M; r)$ des Raumes mit dem gleichen Mittelpunkt M und dem gleichen Radius r?

7.5. Wo liegen alle Kreise $k(M; r)$ des Raumes mit dem gleichen Radius r, deren Mittelpunkte auf einer Strecke $\overline{PQ}$ liegen und deren Durchmesser senkrecht auf $\overline{PQ}$ stehen?

8. Wie entstehen Rotationskörper bzw. ihre Oberflächen?
Kugel
► Wenn eine Kreisfläche um einen Durchmesser rotiert, dann entsteht eine Kugel.

1. Kugel
2. gerader Kreiskegel
3. gerader Kreiszylinder
4. gerader Kreiskegelstumpf

9. Geben Sie an, für welche Körperarten die folgenden Volumenformeln gelten!

1. $V = A_G h$
2. $V = \frac{1}{3} A_G h$

10. Formulieren Sie Sätze!
$A_M = \pi r s$
► Der Mantelflächeninhalt eines geraden Kreiskegels mit dem Radius r und der Mantellinienlänge s beträgt $A_M = \pi r s$.

1. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
2. $A_M = 2\pi r h$
3. $V = \pi r^2 h$
4. $A_O = \pi d^2 = 4\pi r^2$
5. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
6. $A_O = \pi r(r + s)$

8. Bewegungen und Definitionen der Kongruenz von Figuren

Wir haben im 4. Text über die Kongruenz von Figuren gesprochen, haben aber die Kongruenz dort nicht definiert. Das wollen wir in diesem Text, der die Geometrie abschließt, noch tun.

► **Def.:** Die Figur F_1 ist kongruent zur Figur F_2, wenn es eine Bewegung gibt, die F_1 auf F_2 abbildet.

In dieser Definition benutzen wir den Begriff „Bewegung". Wir können diesen Begriff hier nicht exakt definieren. Wir wollen ihn aber erläutern. Wir haben die Spiegelung der Ebene an einer Geraden g bzw. an einem Punkt Z behandelt. Bei diesen Spiegelungen bildet man die Punkte der Ebene auf die Punkte der Ebene ab. Es gibt zu jedem Punkt P der Ebene genau einen Bildpunkt P', zu jeder Strecke als Bild genau eine gleich lange Strecke und zu jedem Winkel als Bild genau einen gleich großen Winkel.
Spiegelungen sind besondere Bewegungen. Andere Bewegungen in der Ebene sind Verschiebungen und Drehungen.

Bei einer Verschiebung wird jedem Punkt P der Ebene ein Punkt P' so zugeordnet, daß alle Strecken $\overline{PP'}$ die gleiche Richtung und gleiche Länge haben.
Auch bei einer Drehung um ein Drehzentrum Z mit einem Winkel α wird jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P' zugeordnet.
Eine Bewegung ist eine Verschiebung, eine Drehung, eine Spiegelung oder eine Zusammensetzung aus diesen Bewegungen. Wenn man beispielsweise eine Figur F_1 ausschneidet und auf eine kongruente Figur F_2 legt, so führt man eine Bewegung aus.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie kann man die Kongruenz von zwei Figuren F_1 und F_2 definieren?
2. Welche Bewegungen gibt es?
3. Welche Eigenschaften hat jede Bewegung in der Ebene?

Reelle Zahlen

9. Die Menge N der natürlichen Zahlen

9.1. Eigenschaften der Menge N

Die natürlichen Zahlen und die Operationen mit ihnen wie z. B. das Addieren, das Subtrahieren und das Multiplizieren haben ihren Ursprung in der objektiven Realität.
In der realen Welt existieren Mengen von realen Objekten, und die Menschen haben in langer geschichtlicher Entwicklung das rein quantitative Charakterisieren dieser Mengen durch natürliche Zahlen gelernt.
So werden unabhängig von ihrer qualitativen Zusammensetzung alle Mengen mit der gleichen Anzahl von Objekten durch die gleich natürliche Zahl quantitativ charakterisiert. Die gesellschaftliche Praxis hat von den Menschen verlangt, daß sie Mengen von realen Objekten quantitativ vergleichen und mehrere Mengen zu einer einzigen vereinigen können. Es war also die jahrhundertelange Praxis der Menschen im Bilden und Vergleichen von Mengen realer Objekte, die zu den abstrakten Begriffen wie z. B. „natürliche Zahl", „kleiner", „größer", „gleich", „addieren", „subtrahieren" und „multiplizieren" führte.
„Die Zahl", schrieb Friedrich Engels, „ist die reinste quantitative Bestimmung, die wir kennen. Aber sie steckt (ist) voll qualitativer Unterschiede."
Durch Vergleichen der natürlichen Zahlen und durch Ausführen von Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen erkennt man die Eigenschaften der Menge der natürlichen Zahlen. Die Menge N der natürlichen Zahlen hat unendlich viele Elemente. Das erste Element ist die Zahl „null", das nächste die Zahl „eins". Dann folgt die Zahl „zwei" usw. Die Menge N ist eine unendliche Menge.
Die Menge N hat noch andere wichtige Eigenschaften:

(I) Wenn n und m zwei beliebige natürliche Zahlen sind, so ist entweder $n < m$ (n kleiner als m) oder $n > m$ oder $n = m$.
$\forall n, m \in N$: entweder $n < m$ oder $n = m$ oder $n > m$

(II) Wenn für drei natürliche Zahlen n, m und k die Relationen $n < m$ und $m < k$ gelten, so ist auch $n < k$.
$\forall\, n, m, k \in N$: $[(n < m \wedge m < k) \rightarrow n < k]$

Wenn eine Menge diese Eigenschaften besitzt, so nennt man sie eine geordnete Menge.

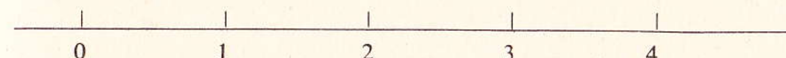
■ Die Menge N der natürlichen Zahlen ist eine unendliche, geordnete Menge.

Aus der Relation $n < m$ folgt, daß $m > n$ (m größer als n) ist.
$n \leqq m$ (gelesen: n kleiner oder gleich m) heißt, daß $n < m$ oder $n = m$ ist.

■ Die Negation von $n < m$ ist die Relation $n \geqq m$. Entsprechend ist die Negation von $n \leqq m$ die Relation $n > m$. $n \neq m$ liest man: „n ungleich m".

9.2. Geometrische Darstellung der natürlichen Zahlen

Man kann die natürlichen Zahlen auf einer Geraden darstellen. Man ordnet der Zahl 0 einen beliebigen Punkt P_0 der Geraden zu. Man ordnet der Zahl 1 einen Punkt P_1 zu.
In gleichen Abständen $l(\overline{P_0P_1})$ werden weitere Punkte gewählt. Dadurch kann man jeder natürlichen Zahl genau einen Punkt dieser Zahlengeraden zuordnen. Man kann aber nicht jedem Punkt auf der Zahlengeraden eine natürliche Zahl zuordnen.



9.3. Die vier Grundrechenarten in der Menge N

9.3.1. Addition

Durch die Addition ordnet man zwei gegebenen natürlichen Zahlen n und m eine dritte Zahl s zu. Man schreibt $n + m = s$. Die Glieder n und m heißen Summanden, $n + m$ (n plus m) ist die Summe aus n und m, sie hat den Wert s.
Die Addition in N hat folgende Eigenschaften:

(1) Wenn man eine beliebige natürliche Zahl m zu einer beliebigen natürlichen Zahl n addiert, so erhält man wieder eine natürliche Zahl s.
Die Addition ist in der Menge N stets ausführbar.
$\forall n, m \in N: \exists s \in N: n + m = s$

(2) Wenn man m zu n addiert, so gibt es genau ein Resultat s.
$\forall m, n \in N: \exists!\, s \in N: n + m = s$
Die Addition in der Menge N ist eine eindeutige Operation.

(3) Bei Summen aus mehr als zwei Summanden spielt es keine Rolle, welche Summanden man zuerst addiert. Für die Addition gilt das Assoziativgesetz:
$n + m + k = (n + m) + k = n + (m + k)$

(4) Der Wert einer Summe ändert sich nicht, wenn man die Summanden miteinander vertauscht.
Für die Addition gilt das Kommutativgesetz:
$n + m = m + n$

9.3.2. Multiplikation

Eine andere Operation in der Menge N ist die Multiplikation. Man nennt $n \cdot m$ (n mal m) das Produkt aus n und m. Die Glieder eines Produkts heißen Faktoren. Man multipliziert die Zahl n mit der Zahl m. Die Multiplikation in der Menge N hat die gleichen Eigenschaften wie die Addition:

(5) Die Multiplikation ist in der Menge N stets ausführbar.

(6) Die Multiplikation ist eine eindeutige Operation.

(7) Die Multiplikation in der Menge N ist assoziativ:
$n \cdot m \cdot k = (n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$

(8) Die Multiplikation in N ist kommutativ:
$n \cdot m = m \cdot n$

Hinzu kommt folgendes Gesetz:

(9) Für die Verbindung der Addition mit der Multiplikation gilt das Distributivgesetz:
$n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k.$

Dieses Rechengesetz sagt, wie eine Summe mit einem Faktor multipliziert wird: Man multipliziert jeden Summanden mit diesem Faktor und addiert dann die Werte der Produkte.

Wenn man für die Summe $n \cdot m + n \cdot k$ das Produkt $n \cdot (m + k)$ schreibt, so hat man den Faktor n ausgeklammert.

Wenn ein Faktor eines Produkts null ist, so hat dieses Produkt den Wert null. Deshalb kann man von der Gleichung $n \cdot m = 0$ auf folgende drei Aussagen schließen:

Entweder a) $n = 0$ und $m \neq 0$
oder b) $n \neq 0$ und $m = 0$
oder c) $n = 0$ und $m = 0$.

Diese drei Aussagen kann man zusammenfassen:

Aus $n \cdot m = 0$ folgt $n = 0$ oder $m = 0$.

Diese Aussage benutzt man oft zur Lösung von Gleichungen.

9.3.3. Subtraktion

$m - n$ heißt die Differenz aus m und n. m heißt der Minuend, n heißt der Subtrahend. Man subtrahiert n von m.

Aus $a + b = c$ folgen $a = c - b$ und $b = c - a$. Deshalb ist die Subtraktion die Umkehrung der Addition.

Die Subtraktion in der Menge N hat folgende Eigenschaften:

(10) Die Subtraktion ist in der Menge N nicht immer ausführbar. Die Gleichung $m - n = x$ ist für $m < n$ in N nicht lösbar, weil $(m - n) \notin N$ ist für $m < n$.
$\sim \forall m, n \in N: \exists x \in N: m - n = x$

(11) Die Subtraktion ist eine eindeutige Operation. Das heißt, wenn die Gleichung $m - n = x$ in N eine Lösung hat, so hat sie genau eine Lösung.

(12) Die Subtraktion ist nicht assoziativ, weil im allgemeinen $n - (m - k) \neq (n - m) - k$ gilt.

(13) Die Subtraktion ist nicht kommutativ; denn im allgemeinen ist $m - n \neq n - m$. Die Glieder einer Differenz haben deshalb verschiedene Namen.

9.3.4. Division

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation; denn aus $a \cdot b = c$ folgen $a = c : b$ und $b = c : a$.

Im Quotienten $m : n$ heißen m der Dividend und n der Divisor. Man dividiert den Dividenden m durch den Divisor n.

Die Division in der Menge N hat folgende Eigenschaften:

(14) Die Division in der Menge N ist nicht immer ausführbar. Die Gleichung $m : n = x$ ist in N nur dann lösbar, wenn n ein Teiler von m ist (geschrieben: $n \mid m$).

► **Def.:** n ist ein Teiler von m, wenn es eine Zahl $z \in N$ gibt, so daß $n \cdot z = m$ ist.

Zum Beispiel ist 7 ein Teiler von 35 ($7 \mid 35$), weil es die Zahl $5 \in N$ gibt, so daß $7 \cdot 5 = 35$ ist. 35 ist das Fünffache von 7. Dagegen ist 32 kein Vielfaches von 7, weil 7 kein Teiler von 32 ist ($7 \nmid 32$). Es gibt keine Zahl $z \in N$, so daß $7 \cdot z = 32$ ist.
Die Division in der Menge N ist nicht ausführbar, wenn der Divisor kein Teiler des Dividenden ist.

(15) Die Division durch null ist nicht definiert. Zum Beispiel hat die Gleichung $\frac{5}{0} = x$ keine Lösung, weil $5 \neq x \cdot 0$ ist. Auch $0 : 0$ ist nicht definiert, weil die Gleichung $\frac{0}{0} = x$ keine eindeutige Lösung hat. $0 = x \cdot 0$ hat unendlich viele Lösungen.

(16) Die Division ist eine eindeutige Operation in der Menge N.

(17) Die Division ist nicht assoziativ, denn im allgemeinen gilt
$n : (m : k) \neq (n : m) : k$.

(18) Die Division ist nicht kommutativ, weil im allgemeinen $n : m \neq m : n$ ist. Die Glieder eines Quotienten haben deshalb verschiedene Namen.

9.4. Primzahlen

Jedes Element der Menge $\Pi = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; \ldots\}$ ist nur durch die Zahl eins und durch sich selbst teilbar. Natürliche Zahlen größer als eins mit dieser Eigenschaft heißen Primzahlen. Die Zahl eins ist keine Primzahl. Die Primzahlen bilden eine unendliche Menge, sie ist eine echte Teilmenge von N. Es gibt genau eine gerade Primzahl, das ist die natürliche Zahl 2. Alle anderen Primzahlen sind ungerade. Eine natürliche Zahl größer als eins ist entweder eine Primzahl, oder man kann sie eindeutig als ein Produkt aus Primzahlen darstellen.
Es ist z. B. $660 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$.

9.5. Die Struktur der Menge N

Die Menge N ist eine geordnete, unendliche Menge. Die Addition und die Multiplikation sind in N immer ausführbar. Diese beiden Operationen sind in der Menge N eindeutig, assoziativ und kommutativ, und für ihre Verbindung gilt das Distributivgesetz. Die Subtraktion und die Division sind in der Menge N auch eindeutig, sie sind aber nicht immer ausführbar, nicht assoziativ und nicht kommutativ.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Worin zeigt sich, daß die natürlichen Zahlen ihren Ursprung in der objektiven Realität haben?
2. Wie erkennt man Eigenschaften der Menge der natürlichen Zahlen?
3. Aus wieviel Elementen besteht die Menge der natürlichen Zahlen?
4. Wie kann man die natürlichen Zahlen geometrisch darstellen?
5. Welche Relationen gelten für zwei gegebene natürliche Zahlen m und n?
6. Welche Eigenschaften besitzt die Menge N?
7. Was bedeutet: Die Addition ist in N stets ausführbar?
8. Was bedeutet: Die Addition ist eine eindeutige Operation?
9. Mit welchem Gesetz können Sie den Wert der Summe $146 + 115 + 85$ schnell finden?
10. Wie lautet das Kommutativgesetz der Addition?
11. Was bedeutet: Die Multiplikation ist in N stets ausführbar?
12. Was bedeutet: Die Multiplikation ist eine eindeutige Operation?
13. Welchen Faktor kann man aus der Summe der Produkte $14a + 42b$ ausklammern? Welches Gesetz wendet man dabei an?
14. Auf welche Aussagen kann man von der Gleichung $a \cdot b = 0$ schließen?
15. Wie heißt die Umkehrung der Addition?
16. Unter welcher Bedingung ist in der Menge N die Subtraktion nicht ausführbar?
17. Aus wieviel Gliedern besteht die Differenz $a(b + c) - d$?
18. Zu welcher Operation ist die Subtraktion die Umkehroperation?
19. Wie heißt die Umkehroperation der Multiplikation?
20. Unter welcher Bedingung ist in der Menge N die Division nicht ausführbar?
21. Wie kann man gerade und ungerade Zahlen darstellen?
22. Unter welcher Bedingung ist eine Zahl eine Primzahl?
23. Wie heißen die Primzahlen zwischen 60 und 70?
24. In welche Primfaktoren kann man die Zahl 24 zerlegen?
25. Wieviel gerade Primzahlen gibt es?

Aufgaben

1. Summe, Summand – eindeutig bestimmt sein

Beispiel: $2b + b$

► Die Summe $2b + b$ besteht aus den Summanden $2b$ und b. Das Resultat $3b$ ist eindeutig bestimmt.

$13 + 18$; $24 + 27$; $x + 3x$; $4a + 3a$;
$132 + 41$; $33 + 98$; $m + 3m$; $2a + 7a$

2. Produkt, Faktor

Beispiel: $a \cdot b$

► Das Produkt $a \cdot b$ besteht aus den Faktoren a und b. Sein Wert ist ab.

$13 \cdot 18$; $24 \cdot 17$; $x \cdot y$; $a \cdot b \cdot c$; $132 \cdot 41$;
$33 \cdot 98$; $(a + b)\,c$; $(2x - 3y)(4a + 3b)$

3. die Differenz aus

Beispiel: $25 - 11$

► Die Differenz aus 25 und 11 ist 14.

$73 - 26$; $34a - 18a$; $7x - 4x$; $103z - 57z$;
$95 - 74$; $3a - a$; $29y - 14y$; $98xy - 46xy$

4. Quotient, Dividend, Divisor – Wert des Quotienten

Beispiel: $2b : b$

► In dem Quotienten $2b : b$ ist $2b$ der Dividend und b der Divisor. Der Wert des Quotienten $2b : b$ ist 2.

$27 : 9$; $48 : 6$; $88 : 4$; $ab : b$;
$36 : 12$; $56 : 7$; $91 : 7$; $3xy : xy$

5. Welchen gemeinsamen Faktor kann man ausklammern?

Beispiel: $13x + 91y$

► Aus dem Term $13x + 91y$ kann man den gemeinsamen Faktor 13 ausklammern und erhält $13(x + 7y)$.

$7a + 7b$; $18a - 24b$; $5 - 5y$; $9xy - 12xz$;
$ab + b$; $6xy - 2y$; $4ab - 6bc$; $3a - 3b + 3c - 3d$;
$a(x - 1) + b(x - 1)$; $(a - b)\,z - (a + b)\,z$;
$a(x - y) - (x - y)$; $ax + ay - bx - by$;
$18a - ma + 18c - mc$; $10ac - 15ad - 2bc + 3bd$;
$(a - b)(3x - 2y) + (a - b)(4x + 7y)$

6. Teiler sein von ...

Beispiel: $3 \mid 15$

► 3 ist ein Teiler von 15.

$3 \mid 12$; $2 \mid 12$; $17 \mid 357$; $4 \mid 12$; $13 \mid 39$; $a \mid ab$;
$\ldots \mid 14$; $\ldots \mid 10$; $\ldots \mid 22$; $\ldots \mid 6$; $\ldots \mid 21$;
$\ldots \mid 33$; $\ldots \mid 35$; $\ldots \mid 55$; $\ldots \mid 65$; $\ldots \mid 39$;
$\ldots \mid 36$; $\ldots \mid 56$

Beispiel: $4 \nmid 15$

► 4 ist kein Teiler von 15.

$7 \nmid 12$; $17 \nmid 25$; $13 \nmid 40$; $\ldots \nmid 22$; $\ldots \nmid 36$; $\ldots \nmid 7$

7. folgen aus

Beispiel: $a < b \,/\, a + c < b + c$

► Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.

$x - 1 \in N \,/\, x \in N$ — $a \geqq b$ und $b > c \,/\, \ldots$

$a - x = a \,/\, x = \ldots$ — $a \leqq b$ und $b \leqq c \,/\, \ldots$

$a + b = c$ mit $a > 0$ und $b > 0 \,/\, a < c$ und ...

8. Lösen Sie folgende Gleichungen!

Beispiel: $x + 7 = 10$

► $x = 3$ ist die Lösung der Gleichung $x + 7 = 10$, weil $x = 3$ die Gleichung erfüllt.

$5 - x = 0$; $2x - 2 = 0$; $x - 1 = 2$; $10 - x = 8$;
$x + 8 = 11$; $a + x = a$

9. Warum sind die folgenden Gleichungen in der Menge N (nicht) lösbar?

Beispiel: $x + 2 = 5$

► Die Gleichung $x + 2 = 5$ ist in der Menge N lösbar, weil die Lösung $x = 3 \in N$ ist.

$x - 2 = 5$; $5 - x = 0$; $3 + x = 2$; $3 - x = 5$;
$x + 3 = 0$; $5 - x = 7$; $a + x = a$

10. Bilden Sie die Negation zu folgenden Ausdrücken!

Beispiel: $a < b, a \geqq b$

► Die Negation zu $a < b$ ist $a \geqq b$.

$x \geqq 4, x < 4$; $z \neq 0, z = 0$; $R \subset Z, R \not\subset Z$

Ergänzen Sie selbst!

$c < y, \ldots$; $a \in N, \ldots$; $x \mid 3, \ldots$
$y = 0, \ldots$; $z \nmid y, \ldots$; $b \in N, \ldots$
$c \geqq 0, \ldots$; $N \subseteq K, \ldots$; $3 \in N, \ldots$

11. Bilden Sie Sätze der Form: Es gilt entweder A oder $\sim A$!

Beispiel: $a < b, a \geqq b$

► Es gilt entweder $a < b$ oder $a \geqq b$.
(Verwenden Sie die Übungen von 10.!)

12. Geben Sie zu den Verben Substantive an, und bilden Sie mit den Substantiven Sätze!

Beispiel: definieren

► die Definition
‚Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel' ist eine Definition des Rechtecks bezüglich des Oberbegriffs Parallelogramm.

addieren, multiplizieren, dividieren, subtrahieren, negieren

13. Bilden Sie zu den Verben Adjektive auf ‚-bar', und bilden Sie mit diesen Adjektiven Sätze!

Beispiel: darstellen

► darstellbar
Die natürlichen Zahlen sind graphisch darstellbar.

ausführen, lösen, vertauschen, teilen

14. Erläutern Sie, warum N eine geordnete Menge ist!

15. Sprechen Sie über die Eigenschaften der Menge N!

16. Sprechen Sie über die Operationen in der Menge N der natürlichen Zahlen!

16.1. Welche Operationen gibt es in der Menge N?
16.2. Welche Operationen sind in der Menge N immer ausführbar?
16.3. Welche Operationen sind in der Menge N eindeutig?

17. Nennen Sie die Eigenschaften folgender Operationen in der Menge N der natürlichen Zahlen!

1. die Addition
2. die Multiplikation
3. die Subtraktion
4. die Division

18. Sprechen Sie über die Gesetze, die für die 4 Grundrechenoperationen in der Menge N der natürlichen Zahlen gelten!

19. Stellen Sie folgende natürliche Zahlen als Produkte aus Primzahlen dar! (Zerlegen Sie die folgenden natürlichen Zahlen in Primfaktoren!)

Beispiel: 24

► $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

1. 60
2. 150
3. 224
4. 360
5. 480
6. 2144
7. 3856
8. 3813
9. 8260
10. 40250

10. Die Menge G der ganzen Zahlen

10.1. Eigenschaften der Menge G

Die Subtraktion ist in N nicht immer ausführbar. Wenn die Subtraktion immer ausführbar sein soll, muß man die Menge N der natürlichen Zahlen zur Menge G der ganzen Zahlen erweitern.



Man kann jeder ganzen Zahl genau einen Punkt auf der Zahlengeraden zuordnen. Aber man kann nicht jedem Punkt auf der Zahlengeraden eine ganze Zahl zuordnen.
Alle Zahlen $g < 0$ heißen negative Zahlen.
Alle Zahlen $g > 0$ heißen positive Zahlen.
Den negativen Zahlen werden auf der Zahlengeraden Punkte links vom Nullpunkt zugeordnet.
Den positiven Zahlen werden auf der Zahlengeraden Punkte rechts vom Nullpunkt zugeordnet.
Die Menge der negativen ganzen Zahlen ist G^-.
Die Menge der positiven ganzen Zahlen ist G^+.
Es gelten folgende Relationen:

$$G = G^+ \cup \{0\} \cup G^-$$
$$G^+ = N \setminus \{0\}$$
$$G = N \cup G^-$$
$$G^+ \subset N \subset G$$

Alle Zahlen $g \geqq 0$ heißen nichtnegative Zahlen.
Alle Zahlen $g \leqq 0$ heißen nichtpositive Zahlen.
Für zwei beliebige ganze Zahlen $a, b \in G$ gilt:
Wenn $a < b$ ist, so liegt der Bildpunkt der Zahl a auf der Zahlengeraden links vom Bildpunkt der Zahl b.
Daran erkennt man, daß die Menge G eine unendliche geordnete Menge ist.

10.2. Die vier Grundrechenarten in der Menge G

Addition, Subtraktion und Multiplikation sind in G immer eindeutig ausführbar. Die Division ist in G nicht immer ausführbar.

■ Die Gleichung $a : b = x$ ist in G nicht lösbar, wenn es keine ganze Zahl g gibt, so daß $g \cdot b = a$ ist.

$(\sim \exists g \in G : b \cdot g = a) \rightarrow (a : b) \notin G.$

Bei der Multiplikation muß man die Vorzeichenregeln beachten: Wenn die Faktoren eines zweigliedrigen Produkts gleiche Vorzeichen haben, so ist der Wert dieses Produkts positiv. Wenn die beiden Faktoren des Produkts verschiedene Vorzeichen haben, so ist der Wert dieses Produkts negativ. Für die Division gelten entsprechende Vorzeichenregeln.

10.3. Das Rechnen mit absoluten Beträgen

Für die ganzen Zahlen $g \in G$ definiert man den absoluten Betrag $|g|$ (gelesen: „g absolut" oder „absoluter Betrag von g" oder „Betrag von g"):

► **Def.:** $|g| = \begin{cases} g & \text{für } g > 0 \\ 0 & \text{für } g = 0 \\ -g & \text{für } g < 0 \end{cases}$

So sind z. B. $|12| = 12$, $|0| = 0$, $|-7| = -(-7) = 7$.
Aus $|x| = 5$ folgen $x_1 = 5$ und $x_2 = -5$.

10.4. Widersprüche

Man unterscheidet logische und dialektische Widersprüche.

■ Ein **logischer Widerspruch** entsteht, wenn zugleich ein Ausdruck H und seine logische Negation $\sim H$ gelten sollen.

Beispiel:

■ H: $a \in N$ ist eine gerade Zahl.
$\sim H$: $a \in N$ ist eine ungerade Zahl.

H und $\sim H$ können für keine natürliche Zahl a zugleich zu wahren Aussagen werden. Für jede natürliche Zahl a widersprechen H und $\sim H$ einander. Deshalb wird der Ausdruck $H \wedge \sim H$ für alle a zu einer falschen Aussage.
Man bezeichnet $H \wedge \sim H$ als einen logischen Widerspruch. Logische Widersprüche dürfen in der Mathematik nicht auftreten.
Sie entstehen durch falsches Denken. In der objektiven Realität gibt es keine logischen Widersprüche. Deshalb kann eine Theorie mit logischen Widersprüchen niemals eine Anwendung und Bestätigung in der Praxis finden. Unter anderem ist aus diesem Grunde die Praxis das entscheidende Kriterium für die Wahrheit einer Theorie.
Weil es in der Mathematik keine logischen Widersprüche gibt, sagt man auch, daß die Mathematik „widerspruchsfrei" ist.
Der logische Widerspruch darf nicht mit dem **dialektischen Widerspruch** verwechselt werden. Dialektische Widersprüche findet man überall in der objektiven Realität. Dialektische Widersprüche sind Triebkräfte der Entwicklung. Auch die Entwicklung der Mathematik resultiert aus dialektischen Widersprüchen zwischen „Nichtwissen" und „Wissenwollen", zwischen dem Stand der mathematischen Theorie und den gesellschaftlichen Notwendigkeiten usw.
So ergab sich im Verlauf der historischen Entwicklung die Notwendigkeit, Subtraktionsaufgaben $a - b$ mit $a, b \in N$ und $b > a$ zu lösen. Solche Aufgaben waren aber in der Menge N der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Das war ein dialektischer Widerspruch. Man löste ihn durch Erweiterung der Menge N zur Menge G.
Bei der Entwicklung der Mathematik traten und treten dialektische Widersprüche auf, die lösbar waren und lösbar sein werden.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Warum muß man die Menge N der natürlichen Zahlen zur Menge G der ganzen Zahlen erweitern?
2. Welche ganzen Zahlen sind größer als 0?
3. Welche ganzen Zahlen sind kleiner als 0?
4. Wo liegen die Punkte, die den negativen ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden zugeordnet werden?
5. Wo liegen die Punkte, die den positiven ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden zugeordnet werden?
6. Welche Zahlen sind nichtnegative Zahlen?
7. Welche Zahlen sind nichtpositive Zahlen?
8. Wie liegen die Bildpunkte von a und b zueinander, wenn $a < b$ gilt?
9. Welche Operationen sind in G immer ausführbar?
10. Welche Operationen sind in G nicht immer ausführbar?
11. Unter welchen Bedingungen ist das Produkt aus zwei ganzen Zahlen positiv?
12. Unter welchen Bedingungen ist das Produkt aus zwei ganzen Zahlen negativ?
13. Zu welcher Zahlenmenge gehört das Produkt aus zwei ganzen Zahlen?
14. Welche Arten von Widersprüchen unterscheidet man?
15. Was heißt: Die Mathematik ist widerspruchsfrei?
16. Unter welcher Bedingung entsteht ein logischer Widerspruch?
17. Was für Widersprüche treten bei der Entwicklung der Mathematik auf?
18. Welche Widersprüche sind Triebkräfte jeder Bewegung und Entwicklung?
19. Warum ist die logische Widerspruchsfreiheit für die Mathematik von großer Bedeutung?
20. Worin unterscheiden sich logische und dialektische Widersprüche?

Aufgaben

1. Was für Zahlen sind die folgenden ganzen Zahlen?

► +2 ist eine positive ganze Zahl.

$+2;\ -2;\ -3;\ +7;\ -6;\ +1;\ +5;\ +3;\ -4;\ -1;\ 0$

2. Lesen Sie!

$+2 \in G^+$

► +2 ist eine positive ganze Zahl.

$+9 \in G^+;\ \ -5 \in G^-;\ \ -17 \in G^-;\ \ +4 \in G^+;\ \ +8 \in G^+;\ \ -8 \in G;$
$15 \in N;\ \ n \in N;\ \ g \in G;\ \ a \in N;\ \ x \in G^+;\ \ y \in G^-$

3. Welche Relation besteht zwischen den Mengen G und G^+; G und G^-; N und G; G und $\{0\}$?

4. Bilden Sie die Durchschnittsmengen von folgenden Mengen!

G und G^-; N und G^+; G und $\{0\}$; G^+ und G^-; N und G^-

5. Bilden Sie folgende Differenzmengen!

$G \setminus G^-;\ \ G \setminus N;\ \ N \setminus G^+;\ \ G^+ \setminus G^-;\ \ G^+ \setminus N;\ \ G^+ \setminus G;\ \ N \setminus \{0\}$

6. Berechnen Sie!

1. $y = |x| + x$ mit $x = -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ +1;\ +2;\ +3;$
2. $y = |x + 3|$ mit $x = -6;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0$

7. Berechnen Sie!

1. $|7 - 4| - |5 + 6| + |-7 - 8| =$
2. $|3 - 5| + |-6 + 2| - |7 - 9| =$
3. $|-1 + 3| - |-3| + |4 - 8| + |-3| =$
4. $|-12 + 5| - |17 - 7| + |-8 - 4| =$

8. Beantworten Sie die Fragen:

1. Wie groß ist der absolute Betrag von x, wenn $x \in G^+$ ist?
2. Wie groß ist der absolute Betrag von x, wenn $x \in G^-$ ist?
3. Kann y in $y = |x + 3|$ negativ werden?
Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Unter welcher Bedingung ist $|x| = x$?
5. Kann $y = x + |x|$ mit $x \in G$ negativ werden?
6. Unter welchen Bedingungen für $x \in G$ wird $y = 0; 2; 5; 7$, wenn $y = |x + 3|$ gilt?

9. Welche Sätze sind wahr, welche Sätze sind falsch?

Die Gleichung $5 - x = 7$ hat in der Menge G genau eine Lösung.
Die Gleichung $8x = 66$ hat in der Menge G genau eine Lösung.
$x = 12$ erfüllt die Gleichung $7x = 74$.
Eine nichtpositive ganze Zahl ist stets negativ.
Eine positive ganze Zahl ist stets größer als Null.
Die Summe aus zwei negativen Zahlen ist stets negativ.
Die Summe aus zwei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen ist stets negativ.

10. Wo liegen die Bildpunkte von x?

x ist eine positive Zahl.

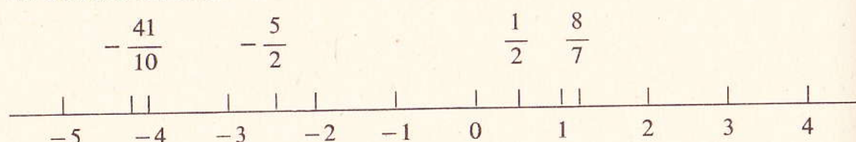
► x ist eine positive Zahl, so daß die Bildpunkte von x rechts vom Nullpunkt liegen.

1. x ist eine negative Zahl
2. $x < y$
3. $x \geqq y$
4. $x < -2$
5. $|x| > 4$
6. $x < -10$
7. $-10 < x < -2$
8. $-10 < x < +2$

11. Die Menge K der rationalen Zahlen

11.1. Begriff der rationalen Zahl und Eigenschaften der Menge K

Die Division ist in der Menge G nicht immer ausführbar. Wenn die Division immer ausführbar sein soll, muß man die Menge G der ganzen Zahlen zur Menge K der rationalen Zahlen erweitern.



Man kann jeder rationalen Zahl genau einen Punkt auf der Zahlengeraden zuordnen. Wir werden noch zeigen, daß man aber nicht jedem Punkt auf der Zahlengeraden eine rationale Zahl zuordnen kann. Die Menge K der rationalen Zahlen ist eine unendliche, geordnete Menge.

Man definiert:

► **Def.:** z ist eine rationale Zahl genau dann, wenn man sie als Quotienten aus zwei ganzen Zahlen darstellen kann.

$$z \in K \leftrightarrow \exists a, b \in G: \frac{a}{b} = z.$$

Die Menge G der ganzen Zahlen ist eine echte Teilmenge der Menge K der rationalen Zahlen; denn man kann jede ganze Zahl p als Quotienten $\frac{p}{1}$ darstellen. Rationale Zahlen $p : g$ schreibt man meist in der Form $\frac{p}{g}$. $\frac{p}{g}$ nennt man einen Bruch. Über dem Bruchstrich steht der Zähler p, unter dem Bruchstrich der Nenner g des Bruches. Bei den Brüchen liest man den Nenner „Ordnungszahl $+ l$"; z. B. $\frac{3}{7}$ (drei Siebentel), $\frac{2}{5}$ (zwei Fünftel), $\frac{2}{3}$ (zwei Drittel), $\frac{14}{37}$ (vierzehn Siebenunddreißigstel) usw. Ausnahmen sind $\frac{1}{2}$ (ein Halb), $\frac{3}{2}$ (drei Halbe) usw.

Beim Erweitern und beim Kürzen eines Bruches ändert sich der Wert dieses Bruches nicht. Man erweitert einen Bruch $\frac{a}{b}$ mit einer Zahl f ($f \neq 0$), indem man a und b mit f multipliziert. Wenn man z. B. den Bruch $\frac{3}{7}$ mit dem Faktor 5 erweitert, so erhält man den Bruch $\frac{15}{35}$.

Man kürzt einen Bruch $\frac{a}{b}$, indem man a und b durch einen gemeinsamen Teiler von a und b dividiert. Beispielsweise kann man den Bruch $\frac{30}{42}$ mit 2, 3 oder 6 kürzen.

Ein Bruch hat den Wert Null, wenn sein Zähler gleich Null und sein Nenner ungleich Null ist.

Wenn $\frac{a}{b}$ eine von Null verschiedene rationale Zahl ist, so nennt man $\frac{b}{a}$ das Reziproke der rationalen Zahl $\frac{a}{b}$. So ist z. B. $\frac{3}{2}$ das Reziproke von $\frac{2}{3}$.

Für das praktische Rechnen stellt man die rationalen Zahlen meistens als Dezimalzahlen dar. Wenn man eine ganze Zahl durch eine andere ganze Zahl dividiert, so entsteht entweder eine unendliche periodische oder eine endliche Dezimalzahl.

Zum Beispiel erhält man für den Bruch $\frac{5}{4}$ die endliche Dezimalzahl 1,25 (eins Komma zwei fünf) und für $\frac{236}{495}$ die unendliche periodische Dezimalzahl $0{,}4767676\ldots = 0{,}4\overline{76}$. Auch umgekehrt kann man jede unendliche periodische oder endliche Dezimalzahl als Bruch aus zwei ganzen Zahlen darstellen.

Den Absolutbetrag $|k|$ einer rationalen Zahl $k \in K$ definiert man wie den Absolutbetrag einer ganzen Zahl.

11.2. Die vier Grundrechenarten in der Menge K

In der Menge K sind die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division mit Ausnahme der Division durch 0 immer eindeutig ausführbar.

Der Name „rationale" (rational lat. – vernünftig) Zahl wurde gewählt, weil man es als vernünftig betrachtete, daß in der Menge K dieser Zahlen die vier Grundrechenarten immer eindeutig ausführbar sind.

11.3. Der Beweis einer Existenzaussage

Es wurde in Abschnitt 1. behauptet, daß jede unendliche periodische Dezimalzahl als Quotient aus zwei ganzen Zahlen darstellbar ist, also eine rationale Zahl ist. Es gilt zum Beispiel folgende Existenzaussage:

$$\exists x \in K: x = 0{,}27\overline{455}$$

Man beweist Existenzaussagen, indem man dieses Element berechnet, konstruiert usw.

Vorüberlegung:

■ 1. Bei einem Beweis muß man die Behauptung in Form einer Gleichung, einer Relation usw. aufschreiben. Man schreibt auch wichtige Voraussetzungen auf, hier z. B. die Definition der rationalen Zahl.

2. Wenn man $0{,}27\overline{455}$ als Quotienten aus zwei ganzen Zahlen darstellen will, muß man die Periode beseitigen.

Voraussetzung: $x \in K \leftrightarrow \exists p, q \in G: \frac{p}{q} = x$

Behauptung: $x = 0{,}27\overline{455} \in K$

Beweis: $0{,}27\overline{455} = x$

$$\begin{array}{rcl} 27455{,}455 &=& 100000x \\ -\quad 27{,}455 &=& 100x \\ \hline 27428 &=& 99900x \end{array}$$

$$x = \frac{27428}{99900} \in K \quad \text{mit } p = 27428 \text{ und } q = 99900$$

w. z. b. w.

(w. z. b. w. bedeutet „was zu beweisen war")

Probe: $27428 : 99900 = 0{,}27\overline{455}$

$$\begin{array}{r} 274280 \\ -199800 \\ \hline 744800 \\ -699300 \\ \hline 455000 \\ -399600 \\ \hline 554000 \\ -499500 \\ \hline 545000 \\ -499500 \\ \hline 45500 \end{array}$$

Merken Sie sich: Bei einer Existenzaussage behauptet man, daß ein Element in einer konkreten Menge oder ein Element mit einer bestimmten Eigenschaft existiert. Man beweist eine Existenzaussage, indem man dieses Element berechnet, konstruiert usw.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Warum muß man die Menge G der ganzen Zahlen zur Menge K der rationalen Zahlen erweitern?
2. Was versteht man unter einer rationalen Zahl?
3. Was für eine rationale Zahl ist $p : g$, wenn p und g verschiedene Vorzeichen haben?
4. Was für eine rationale Zahl ist $p : g$, wenn p und g gleiche Vorzeichen haben?
5. Wie nennt man $\frac{a}{b}$?
6. Wie nennt man a und wie nennt man b in dem Bruch $\frac{a}{b}$?
7. Mit welcher Zahl muß man den Bruch $\frac{3}{7}$ erweitern, um $\frac{15}{35}$ zu erhalten?
8. Mit welchen Zahlen kann der Bruch $\frac{36}{54}$ gekürzt werden?
9. Welchen Wert hat der Bruch $\frac{0}{b}$ mit $b \neq 0$?

10. Unter welcher Bedingung ist ein Bruch Null?
11. Was folgt aus $a : b = 0$?
12. Welche Dezimalzahlen unterscheidet man in K?
13. Unter welcher Bedingung für g ist der Quotient $p : g$ mit $p, g \in G$ nicht definiert?
14. Was ist das Reziproke des Bruches $\frac{7}{5}$?
15. Wie definiert man das Reziproke einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$?
16. Warum ist die Menge K der rationalen Zahlen eine geordnete Menge?

Aufgaben

1. Erläutern Sie, warum die Menge G der ganzen Zahlen eine echte Teilmenge der Menge K der rationalen Zahlen ist!

2. Sprechen Sie über die Ausführbarkeit der Grundrechenarten in der Menge K!

3. Lesen Sie:

$$\frac{3}{7};\ \frac{2}{5};\ \frac{6}{8};\ \frac{2}{3};\ \frac{6}{13};\ \frac{1}{18};\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{14}{37};\ \frac{6}{23};\ \frac{4}{125}!$$

4. Was für Zahlen sind:

$$+\frac{1}{2};\ -3;\ +5;\ -\frac{2}{3};\ 4;\ -0{,}5;\ +\frac{3}{8};\ +2{,}\bar{3};\ -6;\ +0{,}0\overline{17};\ -\frac{4}{3};\ 0?$$

Beispiel:

► $+\frac{1}{2}$ ist eine positive rationale Zahl.

5. Bilden Sie das Reziproke der rationalen Zahlen!

$$\frac{4}{5};\ \frac{6}{11};\ \frac{7}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{3};\ \frac{a}{b};\ \frac{x+y}{x-y};\ \frac{a}{cd};\ \frac{1}{\frac{a}{b}};\ \frac{1}{a-b}!$$

Beispiel: $\frac{2}{3}$

► Das Reziproke von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2}$.

6. Unter welcher Bedingung ist das Produkt zweier rationaler Zahlen a und b gleich 1?

7. Welche der beiden rationalen Zahlen ist größer?

Beispiel: $\frac{3}{5}$ oder $\frac{2}{3}$

► $\frac{2}{3}$ ist größer als $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$

$\frac{11}{3}$ oder $\frac{16}{5}$; $\frac{17}{24}$ oder $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$;

$-\frac{3}{4}$ oder $-\frac{3}{8}$; $-\frac{3}{8}$ oder $-\frac{1}{6}$

8. darstellen A als A

Beispiel: jede rationale Zahl / Quotient aus zwei ...

► Man kann jede rationale Zahl als einen Quotienten aus zwei ganzen Zahlen darstellen.

jede ganze Zahl / Bruch mit dem Nenner ...
ein Bruch / Quotient aus zwei ...
jeder Quotient aus zwei ganzen Zahlen /
unendliche periodische oder endliche ...
jede endliche Dezimalzahl / Quotient aus zwei ...

9. Was darf man in ... (nicht) miteinander vertauschen?

Beispiel:

► In einem Produkt darf man die Faktoren miteinander vertauschen.

Summe	Faktoren
Differenz	Summanden
Quotient	Minuend
Produkt	Dividend
	Subtrahend
	Divisor

10. Bestimmen Sie den Hauptnenner!

Beispiel: $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$

► Der Hauptnenner der Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ist 6.

$\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{4}$ und $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{a}$ und $\frac{c}{b}$;

$\frac{a}{a+ab}$ und $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a-b}$

11. Berechnen Sie!

1. $\frac{a(3x^2-2b)}{12bx^2} - \frac{b(5x^2-3a)}{15ax^2} + \frac{5a-6b}{30x^2} - \frac{a}{4b} + \frac{b}{3a} =$
2. $\frac{5}{a+b} - \frac{4}{a-b} + \frac{9b-a}{a^2-b^2} =$
3. $\frac{1}{a^2+2ab+b^2} + \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{a^4-a^2b^2} =$
4. $\frac{a+1}{a^2-a} - \frac{a-1}{a^2+a} + \frac{1}{a} - \frac{4}{a^2-1} =$

12. Für welche Werte der Variablen sind die folgenden Brüche nicht definiert?

Beispiel: $\frac{3a-4}{4-6a}$

► Der Bruch $\frac{3a-4}{4-6a}$ ist für $a = \frac{2}{3}$ nicht definiert.

1. $\frac{12x(x-4)}{x-16}$
2. $\frac{p+q}{p-3q}$
3. $\frac{x+3}{x(x-3)}$
4. $\frac{a(m-1)}{b(m-1)}$
5. $\frac{12}{q(q-4)}$
6. $\frac{10}{p(p-1)}$

13. Es gilt $a > b$ und $a, b \in G$. Dann gibt es ein $c \in N$, so daß die Gleichung $a = b + c$ erfüllt ist.
Wenn man diese Gleichung mit $a - b$ multipliziert, so erhält man

$$a(a-b) = (b+c)(a-b)$$
$$a \cdot a - a \cdot b = a \cdot b + a \cdot c - b \cdot b - b \cdot c$$
$$a \cdot a - a \cdot b - a \cdot c = a \cdot b - b \cdot b - b \cdot c$$
$$a(a-b-c) = b(a-b-c)$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung durch den gemeinsamen Faktor $(a-b-c)$ dividiert, so erhält man $a = b$. Das ist aber ein (logischer) Widerspruch zu $a > b$. Wo ist der Fehler?

14. Kürzen Sie die Brüche! Die Nenner der Brüche sollen verschieden von null sein.

1. $\frac{16-49m^2}{16-28m}$
2. $\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}$
3. $\frac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}$
4. $\frac{a^2+4a+4}{a+2}$
5. $\frac{mt+ms-nt-ns}{mt-ms-nt+ns}$

15. Zeichnen Sie ein Mengendiagramm, das die Relationen zwischen den Mengen N, G^+, G^-, G und K darstellt!

12. Implikationen

12.1. Struktur einer Implikation

In der Mathematik spielen Ausdrücke der Form „Wenn A, so B“ ($A \to B$) eine große Rolle. Ausdrücke dieser Struktur nennen wir Implikationen. Dabei heißen A die Voraussetzung und B die Behauptung.
Beispiele für wahre bzw. allgemeingültige Implikationen $A \to B$:

a) Wenn $a > 10$ ist, so ist $a > 5$. ($a \in K$)
Voraussetzung A: $a > 10$
Behauptung B: $a > 5$
b) Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist das Dreieck gleichschenklig.
Voraussetzung A: Ein Dreieck ist gleichseitig.
Behauptung B: Das Dreieck ist gleichschenklig.

12.2. Hinreichende Bedingung und notwendige Bedingung

Da viele Sätze der Mathematik die Form von Implikationen haben, wollen wir uns wahre Implikationen etwas genauer ansehen.
Wenn T eine echte Teilmenge der Menge M ist, so kann man folgenden Ausdruck als ein Modell für wahre Implikationen betrachten:

■ Wenn $x \in T$ mit $T \subset M$ ist, so ist $x \in M$.
Voraussetzung: $x \in T$ mit $T \subset M$
Behauptung: $x \in M$

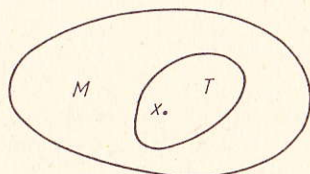


Abb. 12.1. ($x \in T$ mit $T \subset M$) $\to x \in M$

Wenn die Voraussetzung $x \in T$ mit $T \subset M$ erfüllt ist, so ist auch die Behauptung $x \in M$ erfüllt. Man sagt deshalb: Die Voraussetzung $x \in T$ mit $T \subset M$ ist eine *hinreichende* Bedingung für die Behauptung $x \in M$.

Allgemein gilt:

In einer wahren Implikation $A \to B$ ist die Voraussetzung A eine hinreichende Bedingung für die Behauptung B.

Beispiele:

(1) Wenn $a > 10$ ist, so ist $a > 5$.
„$a > 10$“ ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß „$a > 5$“ ist.

(2) Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist das Dreieck gleichschenklig.
„Ein Dreieck ist gleichseitig“ ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß „das Dreieck gleichschenklig ist“.

An dem Modell „Wenn $x \in T$ mit $T \subset M$ ist, so ist $x \in M$“ erkennt man weiterhin, daß die Voraussetzung $x \in T$ mit $T \subset M$ nur dann erfüllt ist, wenn die Behauptung $x \in M$ erfüllt ist. Wenn $x \in M$ nicht erfüllt ist, so ist auch $x \in T$ mit $T \subset M$ nicht erfüllt. Man sagt deshalb: Die Behauptung $x \in M$ ist eine **notwendige** Bedingung für die Voraussetzung $x \in T$ mit $T \subset M$. Dagegen ist die Behauptung in diesem Falle keine hinreichende Bedingung für die Voraussetzung.

Allgemein gilt:

In einer wahren Implikation $A \to B$ ist die Behauptung B eine notwendige Bedingung für die Voraussetzung A.

Beispiele:

(1) „$a > 5$“ ist eine notwendige Bedingung dafür, daß „$a > 10$“ ist.
(2) „Ein Dreieck ist gleichschenklig“ ist eine notwendige Bedingung dafür, daß „das Dreieck gleichseitig ist“.

12.3. Umkehrung und Kontraposition einer wahren Implikation

An dem Modell „Wenn $x \in T$ mit $T \subset M$ ist, so ist $x \in M$“ erkennt man, daß die Umkehrung „Wenn $x \in M$ ist, so ist $x \in T$ mit $T \subset M$“ dieser Implikation nicht allgemeingültig ist, also falsch ist.

Allgemein gilt:

Zu einer wahren Implikation $A \to B$ ist die Umkehrung $B \to A$ im allgemeinen falsch.

Beispiele:

(1) Wenn $a > 5$ ist, so ist $a > 10$. (falsch, fehlende Allgemeingültigkeit)
(2) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, so ist es gleichseitig. (falsch)

An unserem Modell erkennt man, daß der Ausdruck „Wenn $x \notin M$ ist, so ist $x \notin T$ mit $T \subset M$“ wahr ist. Dieser Ausdruck ist die Kontraposition zur Implikation „Wenn $x \in T$ mit $T \subset M$ ist, so ist $x \in M$“. Man erhält die Kontraposition zu einer Implikation $A \to B$, wenn man

1. die Voraussetzung A und die Behauptung B negiert und
2. die beiden Ausdrücke vertauscht.

► **Def.:** Die Kontraposition zu einer Implikation $A \to B$ ist der Ausdruck $\sim B \to \sim A$.

Allgemein gilt: Wenn die Implikation $A \to B$ wahr ist, so ist auch ihre Kontraposition $\sim B \to \sim A$ wahr.

Beispiele:

(1) Wenn $a \leqq 5$ ist, so ist $a \leqq 10$. (wahr)
(2) Wenn ein Dreieck nicht gleichschenklig ist, so ist das Dreieck nicht gleichseitig. (wahr)

Betrachten Sie noch folgende Implikation: Wenn 3 ein Teiler von $a \in G$ und von $b \in G$ ist, so ist 3 ein Teiler von $a + b$.
Die zugehörige Kontraposition lautet: Wenn 3 kein Teiler von $a + b$ ist, so ist 3 kein Teiler von $a \in G$ *oder* von $b \in G$.

► *Beachten Sie bei diesem Beispiel:* Die Negation von „$A \wedge B$" ist „$\sim A \vee \sim B$".

► *Entsprechend gilt:* Die Negation von „$A \vee B$" ist „$\sim A \wedge \sim B$".

Beispiel:

Die Negation von „3 ist ein Teiler von a oder von b" ist „3 ist kein Teiler von a und von b".

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie heißen A und B in der Implikation „Wenn A, so B"?
2. Nennen Sie die Voraussetzungen in folgenden Implikationen:
   2.1. Wenn 6 Teiler von $z \in G$ ist, so ist 3 Teiler von z.
   2.2. Wenn ein Viereck ein Quadrat ist, so hat das Viereck vier gleich lange Seiten.
   2.3. Wenn eine Zahl $z \in N$ ist, so ist die Zahl $z \in K$.
3. Nennen Sie die Behauptungen in den Implikationen von 2.!
4. Was für eine Bedingung ist die Voraussetzung für die Behauptung in einer wahren Implikation?
5. Was für eine Bedingung ist die Behauptung für die Voraussetzung in einer wahren Implikation?
6. Ist die Umkehrung einer wahren Implikation im allgemeinen wahr?
7. Ist eine hinreichende Bedingung im allgemeinen auch notwendig?
8. Ist eine notwendige Bedingung im allgemeinen auch hinreichend?
9. Wie bildet man die Kontraposition zu einer Implikation?
10. Ist die Kontraposition zu einer wahren Implikation wahr?
11. Was ist die Negation von „$A \wedge B$"?
12. Was ist die Negation von „$A \vee B$"?

Aufgaben

1. Lesen Sie! Geben Sie an, ob die Implikation wahr ist!

$50 < x \rightarrow 30 < x$

► Wenn 50 kleiner als x ist, so ist 30 kleiner als x. (wahr)

1. $x < 10 \rightarrow x < 20$
2. $10 > a \rightarrow 5 > a$
3. $5 \mid a \rightarrow 15 \mid a$
4. $x \in N \rightarrow x \in G$
5. $x \mid 10 \rightarrow x \mid 20$

2. Bilden Sie wahre Aussagen!
ein/setzen A für A

$x \mid 20$ mit $x \in G$

► Der Ausdruck $x \mid 20$ mit $x \in G$ wird zu einer wahren Aussage, wenn man die ganze Zahl 5 für die Variable x einsetzt.

1. $g \in G$
2. $a \geqq 5$ mit $a \in K$
3. $3 \mid a + b$ mit $a, b \in N$
4. $2 > z$ mit $z \in N$
5. $b > -1$ mit $b \in G$
6. $2 \wedge 3 \mid m$ mit $m \in G$

3. Bestimmen Sie Voraussetzung und Behauptung in den folgenden Implikationen!

$a > 10 \rightarrow a > 5 \ (a \in K)$

► a ist größer als 10 ist die Voraussetzung und a ist größer als 5 ist die Behauptung.

1. $3 \mid a \wedge 3 \mid b \rightarrow 3 \mid a + b$
2. Wenn ein Viereck ein Quadrat ist, so ist das Viereck ein Rechteck.
3. Ein Dreieck ist nicht gleichseitig, wenn es rechtwinklig ist.
4. Ein Produkt ist positiv, wenn es nur aus positiven Faktoren besteht.
5. Wenn eine Zahl nicht durch 4 teilbar ist, so ist die Zahl nicht durch 8 teilbar.

4. Bilden Sie eine wahre Implikation der Form $A \rightarrow B$ oder der Form $B \rightarrow A$! Beachten Sie dabei den richtigen Gebrauch des bestimmten und des unbestimmten Artikels!

3 ist Teiler einer Zahl $z \in G$.
9 ist Teiler einer Zahl $z \in G$.

► Wenn 9 Teiler **einer** Zahl $z \in G$ ist, so ist 3 Teiler **der** Zahl z.

1. A: 10 ist Teiler einer Zahl $z \in G$.
   B: 2 ist Teiler einer Zahl $z \in G$.
2. A: Eine Zahl z ist eine natürliche Zahl.
   B: Eine Zahl z ist eine rationale Zahl.
3. A: Eine Zahl z ist eine rationale Zahl.
   B: Eine Zahl z ist ein endlicher Dezimalbruch.
4. A: 5 ist kein Teiler einer Zahl $z \in G$.
   B: 20 ist kein Teiler einer Zahl $z \in G$.
5. A: Ein Produkt ist positiv.
   B: Ein Produkt besteht nur aus positiven Faktoren.
6. A: Ein Viereck ist ein Parallelogramm.
   B: Ein Viereck ist ein Rechteck.

5. a) Bilden Sie eine wahre Implikation der Form $M \to N$ oder $N \to M$!
b) Welcher Ausdruck ist eine hinreichende Bedingung für welchen Ausdruck?
c) Welcher Ausdruck ist eine notwendige Bedingung für welchen Ausdruck?
d) Bilden Sie die Kontraposition zur Implikation!

M: Ein Dreieck ist gleichschenklig.
N: Ein Dreieck ist gleichseitig.

► a) Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist das Dreieck gleichschenklig.
b) „Ein Dreieck ist gleichseitig" ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß „das Dreieck gleichschenklig ist".
c) „Ein Dreieck ist gleichschenklig" ist eine notwendige Bedingung dafür, daß „das Dreieck gleichseitig ist".
d) Wenn ein Dreieck nicht gleichschenklig ist, so ist das Dreieck nicht gleichseitig.

1. M: Ein Viereck hat drei rechte Winkel.
   N: Ein Viereck ist ein Quadrat.
2. M: Ein Dreieck ist nicht gleichseitig.
   N: Ein Dreieck ist rechtwinklig.
3. M: Die Diagonalen eines Vierecks sind gleich lang.
   N: Ein Viereck ist ein Rechteck.
4. M: Ein Produkt aus n Faktoren ist negativ.
   N: Ein Produkt aus n Faktoren ungleich 0 hat genau einen negativen Faktor.
5. M: $A \cap B = \emptyset$
   N: $A = \emptyset \vee B = \emptyset$
6. M: $A \cap B = B$
   N: $B \subset A$

13. Äquivalenzen

13.1. Struktur einer Äquivalenz

Wir betrachten folgende zwei Ausdrücke:

M: $A \subseteq B$
N: $A \cap B = A$

Man kann eine Implikation der Form $M \to N$ bilden; denn offensichtlich gilt: Wenn $A \subseteq B$ ist, so ist $A \cap B = A$.

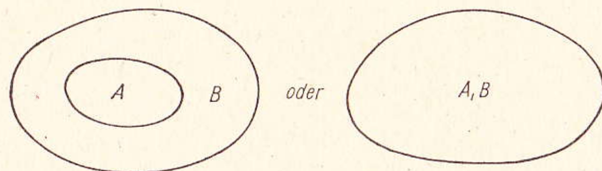


Abb. 13.1. $A \subset B \vee A = B$ (graphische Darstellung von M)

In diesem Falle ist die Umkehrung $N \to M$ der Implikation $M \to N$ auch wahr, denn es gilt auch: Wenn $A \cap B = A$ ist, so ist $A \subseteq B$.
Wir sehen an diesem Beispiel, daß es auch Verbindungen von zwei Ausdrücken gibt, die in beiden Richtungen als wahre Implikationen geschrieben werden können. Solche Verbindungen wollen wir als wahre Äquivalenzen bezeichnen. Wir benutzen für eine Äquivalenz aus M und N das Zeichen $M \leftrightarrow N$.
Man liest: „Genau dann, wenn M, so N".
Das obige Beispiel lautet also:
Genau dann, wenn $A \subseteq B$ ist, ist $A \cap B = A$.
Ein weiteres Beispiel für eine wahre Äquivalenz ist:
Genau dann, wenn 6 ein Teiler von $z \in G$ ist, sind 2 und 3 Teiler von z.

13.2. Hinreichende und notwendige Bedingung

Weil bei einer wahren Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ die Implikation $A \to B$ wahr ist, ist A eine hinreichende Bedingung für B. Weil aber auch die Implikation $B \to A$ wahr ist, ist A eine notwendige Bedingung für B. Entsprechendes gilt für B.

Allgemein gilt:

■ Bei einer wahren Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ sind A eine hinreichende und notwendige Bedingung für B und B eine hinreichende und notwendige Bedingung für A.

In einer Äquivalenz sind also sogar 4 Implikationen enthalten:

$A \to B$ und die Kontraposition $\sim B \to \sim A$,
$B \to A$ und die Kontraposition $\sim A \to \sim B$.

13.3. Äquivalenzen und Definitionen

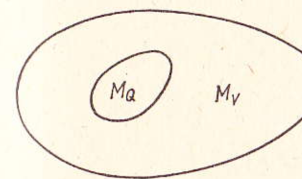
Man gibt oft Definitionen in der Form von Äquivalenzen an.

Beispiele:

Ein Viereck ist ein Quadrat **genau dann, wenn** das Viereck vier rechte Winkel und vier gleich lange Seiten hat.

z ist eine rationale Zahl **genau dann, wenn** man z als einen Quotienten aus zwei ganzen Zahlen darstellen kann.

Man kann eine Definition in Form einer Äquivalenz $M \leftrightarrow N$ schreiben, weil in einer Definition durch M der gleiche Sachverhalt wie durch N ausgedrückt wird. Das soll folgende Zeichnung deutlich machen:



M_Q: Menge der Quadrate $\leftrightarrow$
M_Q: Menge der Vierecke mit vier rechten Winkeln und vier gleich langen Seiten

Abb. 13.2.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Ist die Umkehrung einer wahren Implikation im allgemeinen wahr?
2. Ist die Umkehrung einer wahren Implikation immer falsch?
3. Unter welcher Bedingung kann man zwei Ausdrücke A und B zu einer wahren Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ verbinden?
4. Was für eine Bedingung ist A für B in $A \leftrightarrow B$?
5. Was für eine Bedingung ist B für A in $A \leftrightarrow B$?

Aufgaben

1. Bilden Sie wahre Äquivalenzen bzw. Definitionen!

Genau dann, wenn 3 und 4 Teiler einer Zahl $z \in N$ sind, ...

► Genau dann, wenn 3 und 4 Teiler einer Zahl $z \in N$ sind, ist 12 Teiler der Zahl z.

1. Genau dann, wenn 8 und 6 Teiler einer Zahl $z \in N$ sind, ...
2. Genau dann, wenn ein Faktor eines Produkts 0 ist, ...
3. Genau dann, wenn der Zähler eines Bruches 0 ist und wenn der Nenner ungleich 0 ist, ...
4. Genau dann, wenn man eine Zahl als unendliche periodische oder endliche Dezimalzahl darstellen kann, ...
5. Genau dann, wenn zu zwei Mengen M und N die gleichen Elemente gehören, ...
6. Genau dann, wenn die Aussage H wahr ist, ...
7. Genau dann, wenn ein Rechteck vier gleich lange Seiten hat, ...

2. Bilden Sie aus folgenden Ausdrücken eine wahre Äquivalenz $M \leftrightarrow N$ oder – wenn dies nicht möglich ist – eine wahre Implikation $M \rightarrow N$ oder der Form $N \rightarrow M$!

Was für eine Bedingung ist M für N?

M: Ein Produkt ist negativ.

N: Ein Produkt hat keinen Faktor 0 und $(2n + 1)$ negative Faktoren ($n \in N$).

► Genau dann, wenn ein Produkt negativ ist, hat das Produkt keinen Faktor 0 und $(2n + 1)$ negative Faktoren.
„Ein Produkt ist negativ" ist eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß „das Produkt keinen Faktor 0 und $(2n + 1)$ negative Faktoren hat".

1. M: $A \cup B = \emptyset$
   N: $A = \emptyset$ und $B = \emptyset$
2. M: $A \cap B = \emptyset$
   N: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$
3. M: $z \notin G$
   N: $z \notin K$
4. M: $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$
   N: $A \cap B \neq \emptyset$

5. M: $a \mid c$ und $b \mid c$ ($a, b, c \in G$; a, b verschiedene Primzahlen)
   N: $ab \mid c$
6. M: In einem Dreieck gilt für die Seitenlängen a, b, c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$.
   N: Ein Dreieck ist rechtwinklig.

3. Zusammenfassende Übungen

3.1. Erläutern Sie mit Hilfe der Begriffe „Implikation" und „Umkehrung einer Implikation" den Begriff der Äquivalenz!

3.2. Warum kann man Definitionen auch in Form von Äquivalenzen schreiben?

3.3. Schreiben Sie die Definitionen der Begriffe „Teilmenge", „Vereinigungsmenge", „Durchschnittsmenge" und „Differenzmenge" in Form von Äquivalenzen!
(Text „Mengen")

Teilmenge:

► Genau dann, wenn alle Elemente einer Menge A auch Elemente einer Menge B sind, ist die Menge A eine Teilmenge der Menge B.

14. Das direkte Beweisverfahren

14.1. Das Beweisen

In allen Wissenschaften spielen „Beweise" von Gesetzen und Theorien eine große Rolle. Meist kann man ein Gesetz beweisen, indem man es in der Praxis überprüft. Zum Beispiel kann man die Behauptung, daß sich Wasser ausdehnt, wenn man es von 20 °C auf 50 °C erwärmt, durch einen Versuch bestätigen. Auch die mathematischen Gesetze leitet man aus der Praxis her und kann sie in der Praxis überprüfen. Sehr oft ist aber ein direkter Zusammenhang zwischen mathematischen Gesetzen und der Praxis nicht mehr vorhanden, weil die Objekte der Mathematik abstrakter Natur sind. Deshalb spielen in der Mathematik logische Beweise eine große Rolle. Bei einem logischen Beweis geht man von wahren Aussagen aus und formt sie mit Hilfe logischer Schlüsse so lange um, bis man die Aussage erhält, die man beweisen will.
Weil viele Sätze der Mathematik die Form „Wenn A, so B" haben, haben direkte Beweise von Implikationen große Bedeutung. Bei einem direkten Beweis zeigt man „direkt", daß eine Behauptung B wahr ist.
Wir wollen das direkte Beweisverfahren zuerst an zwei Beispielen zeigen und dann eine allgemeine Handlungsanweisung für das Führen solcher Beweise aufstellen.

14.2. Das direkte Beweisverfahren

Wir beweisen zuerst folgenden Satz:

Wenn man drei beliebige aufeinanderfolgende, natürliche Zahlen addiert, so ist 3 Teiler dieser Summe.

Voraussetzung:

$n \in N$

n; $n + 1$; $n + 2$ sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen

Behauptung:

$S = n + (n + 1) + (n + 2) = 3g$ mit $g \in G$

Beweis(gang):

$$S = n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3$$
$$= 3(n + 1) = 3g \text{ mit } n + 1 = g \in G$$

w. z. b. w. (was zu beweisen war)

Wie führt man den direkten Beweis einer Implikation?

1. Man analysiert den Sachverhalt. Zum Beispiel überlegt man sich bei unserem Satz, wie man drei beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen allgemein schreiben kann und was es heißt, daß eine Zahl durch 3 teilbar ist.

2. Man schreibt die Voraussetzungen des Beweises auf, wenn möglich in Form von Gleichungen oder Ungleichungen. Eine Voraussetzung des Beweises ist die Voraussetzung der Implikation. Außerdem kann man noch andere wahre Aussagen aufschreiben, von denen man nach der Analyse des Sachverhalts annimmt, daß sie für den Beweis wichtig sind. (Bei unserer Aufgabe könnte man zum Beispiel angeben:
$c \mid S \rightarrow \exists x \in G: x \cdot c = S$.)

3. Man schreibt die Behauptung auf, wenn möglich in Form einer Gleichung oder Ungleichung.

4. Man führt den Beweis:
Man formt eine Seite der Behauptung in die andere Seite um und benutzt dabei die Voraussetzung.

Wir wollen jetzt den folgenden Satz beweisen:

Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ (b, d \neq 0)$ folgt $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$.

Wir schreiben den Satz in Form einer Implikation:

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ (b, d \neq 0)$ gilt, so gilt $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$.

Voraussetzung:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ (b, d \neq 0)$$

Behauptung:

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

Beweis:

$$\frac{a + b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} = \frac{c + d}{d}$$

w. z. b. w.

Wenn man diese Umformung nicht findet, gibt es einen anderen Weg. Man formt die Behauptung insgesamt um, bis man zur Voraussetzung oder zu einer anderen wahren Aussage kommt. Dann prüft man, ob jeder Schritt eindeutig umkehrbar ist. Wenn jeder Schritt eindeutig umkehrbar ist, so ergibt sich die Behauptung aus der Voraussetzung oder einer anderen wahren Aussage, wie es ein Beweis verlangt.

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$
$$(a + b) \cdot d = (c + d) \cdot b$$
$$ad + bd = cb + db$$
$$ad = cb$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Jeder Schritt ist eindeutig umkehrbar. Also folgt aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ die Behauptung $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$ w. z. b. w.

Schließlich kann man den Beweis auch so führen, daß man die Voraussetzung in die Behauptung umformt. Überlegen Sie, wie der Beweis dann aussieht!

14.3. Handlungsanweisung für das direkte Beweisverfahren

Wenn wir die Beispiele betrachten, so ergibt sich folgende Handlungsanweisung für den direkten Beweis einer Implikation:

■ 1. Analysieren Sie den Sachverhalt! (Zum Beispiel auch mit Hilfe einer Skizze) Schreiben Sie – wenn nötig – den Satz in Form einer Implikation!
2. Schreiben Sie die Voraussetzung und die Behauptung als Gleichungen, Ungleichungen oder als andere Relationen!
3. Führen Sie den Beweis:
3.1. Formen Sie die Voraussetzung um, bis Sie die Behauptung erhalten!
3.2. Wenn die Behauptung die Form einer Gleichung hat, so formen Sie eine Seite der Behauptung in die andere Seite um und benutzen Sie dabei die Voraussetzung!
Oder:
3.3. Formen Sie die Behauptung um, bis Sie zur Voraussetzung oder einer anderen wahren Aussage kommen!
Überzeugen Sie sich, daß jeder Schritt eindeutig umkehrbar ist!

Bei geometrischen Beweisen kann man die Handlungsanweisung sinngemäß anwenden.
Manchmal muß man auch zeigen, daß eine Aussage falsch ist. Das zeigt man am einfachsten dadurch, daß man ein Gegenbeispiel bildet.

Beispiel:

„Wenn eine Zahl gerade ist, so ist sie durch 4 teilbar." Diese Aussage ist falsch, denn 6 ist gerade, aber nicht durch 4 teilbar.

Merken Sie sich: Ein Beispiel oder mehrere Beispiele sind kein Beweis dafür, daß ein Satz wahr (allgemeingültig) ist. Ein Gegenbeispiel ist ein Beweis dafür, daß eine Aussage falsch ist.

Wichtige Sonderfälle des direkten Beweisverfahrens sind Beweise von Äquivalenzen und von Sätzen, die für alle natürlichen Zahlen gelten. Mit diesen Beweisen werden sich die nächsten Texte beschäftigen.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie zeigt man die Gültigkeit von naturwissenschaftlichen oder gesellschaftswissenschaftlichen Gesetzen?
2. Warum ist in der Mathematik ein direkter Zusammenhang zwischen mathematischen Gesetzen und der Praxis oft nicht mehr vorhanden?
3. Wie heißt das Beweisverfahren, bei dem man eine Behauptung direkt mit Hilfe der Voraussetzung herleitet?
4. Wie lautet die Handlungsanweisung für einen direkten Beweis?
5. Wie zeigt man am einfachsten, daß eine Allaussage falsch ist?
6. Ist ein Beispiel ein Beweis für eine Allaussage?

Aufgaben

1. Beantworten Sie die Fragen!

1.1. Wovon geht man bei logischen Beweisen aus?

1.2. Was benutzt man bei der Umformung der Behauptung?

1.3. Was will man erhalten?

1.4. Was versteht man unter einem direkten Beweis?

2. Sprechen Sie über das Thema „Beweise in der Mathematik"!
Verwenden Sie dabei folgendes Sprachmaterial:
Gesetze in der Praxis überprüfen; Objekte der Mathematik von abstrakter Natur; logische Beweise; von wahren Aussagen ausgehen; mit Hilfe logischer Schlüsse umformen; Behauptung erhalten.

3. Beweisen Sie!

1. Wenn 5 ein Teiler von zwei natürlichen Zahlen ist, so ist 5 ein Teiler von ihrer Summe.

2. Wenn die natürliche Zahl n ungerade ist, so ist 4 ein Teiler von $n^2 - 1$.
3. Wenn die natürliche Zahl n ungerade ist, so ist 8 Teiler von $n^2 - 1$.
Anleitung: Unterscheiden Sie 2 Fälle:
a) $n = 2m + 1$ mit $m = 2g$ und $g \in N$,
b) $n = 2m + 1$ mit $m = 2g + 1$ und $g \in N$.
4. Wenn a und b natürliche Zahlen ungleich 0 sind, so gilt $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$.
5. Das Produkt aus drei beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen hat den Teiler 6.

15. Beweis einer Äquivalenz

■ Der Beweis einer Äquivalenz „Genau dann, wenn A, so B" muß in zwei Schritten erfolgen:
1. Man beweist die Implikation „Wenn A, so B".
2. Man beweist die Implikation „Wenn B, so A".

Beispiel: Beweisen Sie den Satz:

Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn die Diagonalen des Vierecks einander halbieren.

Beweis der 1. Implikation

Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, halbieren die Diagonalen des Vierecks einander.

Skizze:

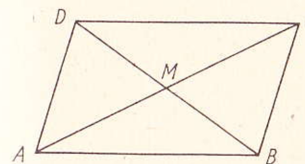


Abb. 15.1.

Analyse des Sachverhalts:
Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ haben für das Parallelogramm $ABCD$ die gleiche Bedeutung. So zerlegt jede Diagonale das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke. Deshalb genügt es zu zeigen, daß eine Diagonale halbiert wird. Man sagt: Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit (o. B. d. A.) beweisen wir, daß $\overline{AC}$ halbiert wird, daß also $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ ist.
Kongruenz von Stücken geometrischer Figuren beweist man oft über kongruente Dreiecke.

Voraussetzung: Ein Viereck ist ein Parallelogramm, d. h.

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Behauptung: Die Diagonalen des Vierecks halbieren einander, d. h.

$\overline{AM} \cong \overline{MC}$; $\overline{BM} \cong \overline{MD}$

Beweis:

1. Dreieck $ABM \cong$ Dreieck DCM

denn: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
$\sphericalangle MBA \cong \sphericalangle MDC$
$\sphericalangle MAB \cong \sphericalangle MCD$

2. $\overline{AM}$ und $\overline{MC}$ sind gleichliegende Seiten in den kongruenten Dreiecken ABM und DCM.
3. Aus 1. und 2. folgt $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ w. z. b. w.

Beweis der 2. Implikation

Wenn die Diagonalen eines Vierecks einander halbieren, ist das Viereck ein Parallelogramm.

Skizze s. Abb. 15.1.

Analyse des Sachverhalts:
Wenn man zeigen will, daß ein Viereck ein Parallelogramm ist, genügt es zu zeigen, daß es zwei Paare kongruenter Gegenseiten hat. O. B. d. A. zeigen wir, daß $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ist.

Voraussetzung:
$\overline{AM} \cong \overline{MC}$; $\overline{DM} \cong \overline{MB}$

Behauptung:
$\overline{AB} \cong \overline{DC}$; $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

Beweis:

1. Dreieck $ABM \cong$ Dreieck MDC
denn: $\sphericalangle AMB \cong \sphericalangle DMC$
$\overline{AM} \cong \overline{MC}$
$\overline{DM} \cong \overline{MB}$
2. $\overline{DC}$ und $\overline{AB}$ sind gleichliegende Seiten in den kongruenten Dreiecken ABM und DCM.
3. Aus 1. und 2. folgt $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ w. z. b. w.

Die Handlungsanweisung für den Beweis eines Satzes, der die Form einer Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ hat, lautet also:

1. Beweisen Sie die Implikation $A \rightarrow B$!
2. Beweisen Sie die Implikation $B \rightarrow A$!

Übungen und Aufgaben

Kontrollfrage

Wie lautet die Handlungsanweisung für den Beweis einer Äquivalenz $H_1 \leftrightarrow H_2$?

Aufgaben

Beweisen Sie!

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
2. Zwei Sehnen in einem Kreis sind gleich lang genau dann, wenn ihre Abstände vom Mittelpunkt gleich groß sind.
3. Ein Parallelogramm ist ein Rechteck genau dann, wenn seine Diagonalen gleich lang sind.

16. Das Beweisverfahren durch Schluß von n auf $n + 1$

Betrachten Sie folgende Sätze!

Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wenn man die Zahl 4^n mit $n \in N$ durch 3 teilt, so bleibt der Rest 1.

Ein n-Eck ($n \geqq 3$) hat $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

Diese Sätze haben eine Gemeinsamkeit. Es sind Aussagen, die für natürliche Zahlen gelten, und zwar für alle natürlichen Zahlen, die größer als ein bestimmtes $a \in N$ sind. Beim 1. Satz ist $a = 1$; beim 2. Satz ist $a = 0$; beim 3. Satz ist $a = 3$. Wenn ein Satz für alle natürlichen Zahlen $n \geqq a$ gelten soll, so beweist man ihn oft durch ein besonderes Beweisverfahren, durch den Schluß von n auf $n + 1$. Für dieses Beweisverfahren durch Schluß von n auf $n + 1$ geben wir sofort die **Handlungsanweisung** an:

■ 1. Schritt: Man zeigt, daß der Satz für die entsprechende kleinste Zahl $a \in N$ gilt.
2. Schritt: Man beweist, daß der Satz für die Zahl $n + 1$ gilt, und benutzt dabei als Voraussetzung, daß er für die beliebige Zahl $n \geqq a$ gilt.

Man beweist also nicht unmittelbar, daß der Satz für jede Zahl $n \geqq a$ gilt, sondern führt die beiden Beweisschritte aus. Trotzdem ist der Beweis korrekt, wie folgende Überlegungen zeigen.
Aus dem 1. Schritt folgt, daß der Satz für a wahr ist.

Aus dem 2. Schritt folgt zusammen mit dem 1. Schritt, daß der Satz für $a + 1$ gilt.
Wenn der Satz für $a + 1$ gilt, folgt aus dem 2. Schritt wieder, daß der Satz auch für $a + 2$ gilt.
Diesen Gedankengang kann man immer weiter fortsetzen und erkennt, daß der Satz für alle $n \geqq a$ gilt. ($n \in N$)
Nun beweisen wir die oben genannten drei Sätze durch den Schluß von n auf $n + 1$.

Satz:

Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis:

1. Schritt: Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis $n = 1$ ist 1. Die behauptete Formel führt für $a = 1$ zum gleichen Ergebnis: $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.
Also ist der Satz für $a = 1$ wahr.

2. Schritt: *Voraussetzung:* $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \geqq 1)$

Behauptung: $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Beweis:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) \\ &= S_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Satz:

Wenn man die Zahl 4^n mit $n \in N$ durch 3 teilt, so bleibt der Rest 1.

Diesen Satz kann man schreiben:

$4^n = 3k + 1$ mit $n, k \in N$.

Beweis:

1. Schritt: Der Satz ist richtig für $a = 0$. Denn $4^0 = 1 = 3 \cdot 0 + 1$ mit $0 \in N$.

2. Schritt: *Voraussetzung:* $4^n = 3k + 1$ mit $n, k \in N$

Behauptung: $4^{n+1} = 3m + 1$ mit $n, m \in N$

Beweis:

$$\begin{aligned} 4^{n+1} &= 4^n \cdot 4^1 = (3k+1) \cdot 4 = 12k + 4 = (12k + 3) + 1 \\ &= 3(4k+1) + 1 = 3m + 1 \text{ mit } 4k + 1 = m \in N \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Satz: Ein n-Eck ($n \geqq 3$) hat $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

Beweis:

1. Schritt: Der Satz ist richtig für $a = 3$. Ein Dreieck hat $D_3 = \frac{3(3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0$ Diagonalen.

2. Schritt: *Voraussetzung:* Ein n-Eck hat $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

Behauptung: Ein $(n + 1)$-Eck hat $D_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ Diagonalen.

Beweis: Nimmt man zu einem n-Eck eine Ecke P_{n+1} dazu, ergeben sich $(n + 1) - 3 = n - 2$ neue Diagonalen von P_{n+1} aus. Außerdem wird eine bisherige Seite AB zu einer Diagonalen. Also gibt es $n - 1$ neue Diagonalen.

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D_n + (n-1) = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 \\ &= \frac{n(n-3) + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} \\ &= \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

w. z. b. w.

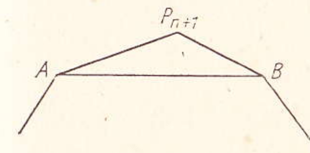


Abb. 16.1.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Bei welchen Sätzen wendet man das Beweisverfahren durch Schluß von n auf $n + 1$ an?
2. Unter welchen Bedingungen ist ein Satz für alle natürlichen Zahlen $n \geqq a$ ($a \in N$) erfüllt?
3. Wie führt man den Beweis durch Schluß von n auf $n + 1$?
4. Was wählt man als Voraussetzung beim 2. Beweisschritt des Beweises durch Schluß von n auf $n + 1$?
5. Wie heißt die Behauptung beim 2. Beweisschritt des Beweises durch Schluß von n auf $n + 1$?

6. Warum gilt ein Satz für alle natürlichen Zahlen $n \geqq a$ ($a \in N$), wenn man ihn durch Schluß von n auf $n + 1$ bewiesen hat?
7. Wie heißt die Handlungsanweisung für das Beweisverfahren durch Schluß von n auf $n + 1$?

Aufgaben

1. gelten für

Für welche Zahlen gilt der Satz „Wenn $n \in N$ eine ungerade Zahl ist, so ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar"?

► Der Satz „Wenn $n \in N$ eine ungerade Zahl ist, so ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar" gilt für alle ungeraden natürlichen Zahlen $n \geqq 1$.

Für welche Zahlen gilt
1. das Kommutativgesetz der Addition,
2. das Distributivgesetz,
3. die Implikation $(3 \mid a \wedge 3 \mid b \rightarrow 3 \mid a + b)$

2. folgen aus

$a > 10 \rightarrow a > 5$

► Aus $a > 10$ folgt $a > 5$.

1. $3 \mid a \wedge 3 \mid b \rightarrow 3 \mid a + b$
2. $x \in T \subset M \rightarrow x \in M$
3. $A = \emptyset$ und $B = \emptyset \rightarrow A \cup B = \ldots$
4. $A \cup B = B \rightarrow \ldots$
5. $a > 0$ und $b > 0 \rightarrow ab \ldots$

3. Folgende Gleichungen gelten für $n \in N$. Wie heißen die Gleichungen für $n + 1$?

$S_n = (n - 1)(2n + 1)$

► $S_{n+1} = [(n + 1) - 1] \cdot [2(n + 1) + 1]$
$= n(2n + 2 + 1) = n(2n + 3)$

1. $U_n = (3n - 1)\,n$
2. $T_n = n^2(n - 1)$
3. $S_n = \dfrac{n(n - 1)(n - 2)}{n^2}$
4. $V_n = 4^n - 3n + 2$
5. $W_n = a^n - 2bn - c$

4. Beweisen Sie!
1. Für alle natürlichen Zahlen ist der Term $3n^2 - n$ durch 2 teilbar.
2. Für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ ist der Term $4^n + 15n - 1$ durch 9 teilbar. (Im Text wurde schon bewiesen, daß $4^n = 3k + 1$ mit $n, k \in N$ ist!)
3. Für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ ist die Summe der Quadrate der ersten n Zahlen $S_n = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.
4. Die Summe der ersten n Zahlen, die durch 4 teilbar sind, beträgt $2n(n + 1)$.

17. Das Potenzieren

17.1. Definition der Potenz und Potenzgesetze

► **Def.:** Die Potenz a^n mit $n \in N \setminus \{0; 1\}$ ist das Produkt aus n gleichen Faktoren a.

$$a^n =_{Df} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Man nennt a^n die n-te Potenz von a. Man liest „a hoch n". a heißt die Basis, und n heißt der Exponent.
Wenn man die Basis a mit dem Exponenten n potenziert, erhält man den Potenzwert b ($a^n = b$). Zum Beispiel hat die fünfte Potenz von 2 den Wert 32 ($2^5 = 32$).
Für die Verbindung des Potenzierens mit der Multiplikation und mit der Division und für das Potenzieren von Potenzen gelten die Potenzgesetze:

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

Man multipliziert Potenzen mit gleichen Basen, indem man ihre gemeinsame Basis mit der Summe aus ihren Exponenten potenziert.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Man dividiert Potenzen mit gleichen Basen, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz aus den Exponenten von Dividend und Divisor potenziert.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Man multipliziert Potenzen mit gleichen Exponenten, indem man das Produkt aus ihren Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Man dividiert Potenzen mit gleichen Exponenten, indem man den Quotienten aus den Basen des Dividenden und des Divisors mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Man potenziert eine Potenz, indem man ihre Basis mit dem Produkt aus den Exponenten potenziert.

Auf der Grundlage der Potenzgesetze erweitert man durch folgende Definitionen den Potenzbegriff auf Potenzen mit Exponenten aus G:

► **Def:** $a^1 = a$
$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad (n \in G^+ \wedge a \neq 0)$

Das Potenzieren mit ganzzahligen Exponenten und mit der Basis $a \in K \setminus \{0\}$ hat folgende Eigenschaften:

1. Das Potenzieren ist in K immer eindeutig ausführbar. (Deshalb gehört das Potenzieren wie die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division zu den „rationalen Rechenoperationen".)
2. Das Potenzieren ist nicht assoziativ; denn im allgemeinen gilt: $(a^m)^n \neq a^{(m^n)}$.
3. Das Potenzieren ist nicht kommutativ; denn im allgemeinen gilt: $a^m \neq m^a$.

17.2. Potenzen eines Binoms

Eine wichtige Beziehung, die man in vielen Teilgebieten der Mathematik häufig anwendet, gilt für die Potenzen eines Binoms (einer zweigliedrigen Summe).
Die n-te Potenz eines Binoms $a + b$ kann man für $n \in N$ als eine Summe darstellen:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k$$

Diese Beziehung nennt man den Binomialsatz.

Man erkennt:

1. Die Summe besteht aus $n + 1$ Summanden.
2. Die Summe aus den Exponenten von a und b ist in jedem Glied gleich n.
3. Die Summe ist nach fallenden Potenzen von a und steigenden Potenzen von b (von n bis 0 bzw. von 0 bis n) geordnet; dabei bedeuten a das 1. Glied des Binoms und b das 2. Glied des Binoms.
4. Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ (gelesen: n über k), die bei den Summanden auftreten, heißen Binomialkoeffizienten. Es sind positive ganze Zahlen. Man berechnet sie nach der Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

(*Beispiel:* $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \mathrel{\hat=} 10$)

Das Symbol $k!$ liest man:
„k-Fakultät", und es ist $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$.

Außerdem definiert man: $0! = 1$ und $\binom{n}{0} = 1$.

Anmerkung: Man kann die Binomialkoeffizienten auch im „Pascalschen Dreieck" ablesen:

$n = 0$					1				
$n = 1$				1		1			
$n = 2$			1		2		1		
$n = 3$		1		3		3		1	
$n = 4$	1		4		6		4		1

...

Im Sonderfall $n = 2$ ergeben sich aus dem Binomialsatz die „binomischen Formeln": $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie ist die Potenz a^n mit $n \in N \setminus \{0; 1\}$ definiert?
2. Wie nennt man a^n, und wie liest man es?
3. Wie heißen a und n in a^n?
4. Die wievielte Potenz von 3 ist 81?
5. Wie multipliziert man Potenzen mit gleichen Basen?
6. Wie multipliziert man Potenzen mit gleichen Exponenten?
7. Wie potenziert man eine Potenz?
8. Wie definiert man a^1 bzw. a^0?
9. Durch welche Definitionen erweitert man den Potenzbegriff auf Potenzen mit Exponenten aus der Menge G?
10. Was versteht man unter einem Binom?
11. Was für Zahlen sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $k \leqq n$?
12. Wie liest man das Symbol $k!$ und was bedeutet es?
13. Welche Gleichungen nennt man „binomische Formeln"?
14. Wie ist die Summe geordnet, wenn man die n-te Potenz eines Binoms $a + b$ als Summe aus $n + 1$ Summanden schreibt?

Aufgaben

1. Lesen und berechnen Sie die Potenzen!

2^3; 4^2; 3^4; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $0{,}5^2$; $(-2)^4$; $(-4)^3$

2. Lesen und lösen Sie folgende Aufgaben!

Beispiel: $a^x \cdot a^{2y}$

► $a^x \cdot a^{2y} = a^{x+2y}$ — a hoch x mal a hoch $2y$ ist a hoch x plus $2y$.

$b^3 \cdot b^4$; $a^k \cdot a^{5k}$; $m^3 \cdot n^3$; $4^n \cdot 5^n$

$h^m \cdot h$; $c^7 : c^2$; $a^{3y} : a^{2y}$; $x^{4m} : x^{-4n}$

$8^x : 4^x$; $(3n)^2 : n^2$; $a^q : b^q$; $m^2 : m^5$

$y^{-m} : y^{-2m}$; $x^{-2k} \cdot x^{3k}$; $(4a)^{-2} \cdot a^{-2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-m} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-m}$

3. Nennen Sie die Eigenschaften des Potenzierens mit ganzzahligen Exponenten und Basen $a \in K \setminus \{0\}$!

4. Multiplizieren Sie!
1. $(4a + 3b)(a - 4b)$
2. $(a^2 - b^2 + 2c)(4b^2 - c^2)$
3. $(a^{-1} + b)(a - b^{-1})$
4. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5. $(p^{q+2} - p^{q+1} + p^q - p^{q-1} + p^{q-2})(p^{8-q} + p^{7-q})$

5. Dividieren Sie!
1. $(3x^3 + 10x^2 + 15x + 4) : (3x + 1)$
2. $(4x^3 - 11x^2 + 22x - 12) : (4x - 3)$
3. $(x^5 - 3x^4 - x^3 + x^2 + 6x) : (x^3 - x - 2)$
4. $(9a^4 - 58a^2b^2 + 49b^4) : (3a^2 - 4ab - 7b^2)$
5. $(y^{3n} + z^{3n}) : (y^n + z^n)$
6. $(a^{n+4} - a^n) : (a^3 + a)$
7. $(x^9 - 3x^6y^3 + 3x^3y^6 - y^9) : (x^4 - x^3y + xy^3 + y^4)$

6. Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten!

1. $\binom{3}{2}$; 3. $\binom{4}{2}$; 5. $\binom{4}{1}$; 7. $\binom{4}{3}$

2. $\binom{6}{2}$; 4. $\binom{6}{5}$; 6. $\binom{10}{7}$; 8. $\binom{11}{3}$.

7. Berechnen Sie mit den binomischen Formeln folgende Binome!

1. $(2a + 3b)^2$; 3. $(2r^2 + s)^2$; 5. $(1 - x^2)^2$;

2. $\left(\frac{m}{2} + \frac{2n}{3}\right)^2$; 4. $(5x - 7y)^2$; 6. $(2u + 3v)(2u - 3v)$

8. Berechnen Sie!

1. $(a + b)^5$ 3. $\left(\frac{a}{3} - 3b\right)^3$ 5. $(x^3y - 3a)^4$

2. $(2x + 3y)^4$ 4. $(u - v)^3$ 6. $\left(\frac{1}{2} \cdot r^3 + \frac{2}{3} \cdot s^2\right)^4$

18. Das Radizieren

Weil die Basis und der Exponent einer Potenz nicht miteinander vertauschbar sind, gibt es zwei Umkehroperationen des Potenzierens. Die erste Umkehrung des Potenzierens ist das Radizieren.
Wenn man $a^n = b$ nach a auflöst, erhält man $a = \sqrt[n]{b}$. Man liest: a gleich n-te Wurzel aus b. Die Zahl b unter dem Wurzelzeichen heißt der Radikand, die Zahl n heißt der Wurzelexponent. a ist der Wurzelwert.

Weil auch das Radizieren eine eindeutige Operation sein soll, wird $\sqrt[n]{b}$ nur für $b \geqq 0$ definiert, und außerdem wird $\sqrt[n]{b} \geqq 0$ festgelegt.
$\sqrt[n]{b}$ kann mit folgender Gleichung definiert werden:

▶ Def.: $(\sqrt[n]{b})^n = b$ mit $b \geqq 0$ und $\sqrt[n]{b} \geqq 0$

Das bedeutet:

$\sqrt[n]{b}$ ist die nichtnegative Zahl, die man mit n potenzieren muß, um die nichtnegative Zahl b zu erhalten.

Eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten 2 nennt man eine Quadratwurzel. Eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten 3 heißt auch Kubikwurzel. Bei Quadratwurzeln schreibt man das Wurzelzeichen ohne Wurzelexponenten.
Man kann jede Wurzel auch als Potenz schreiben:

▶ Def.: $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ $n \in G^+ \setminus \{1\} \wedge b \geqq 0$

Dadurch wird der Begriff der Wurzel auf den Potenzbegriff zurückgeführt.
Die Definition der Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten ergibt zusammen mit den Potenzgesetzen die Wurzelgesetze:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Man multipliziert Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten, indem man das Produkt aus ihren Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Man dividiert Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten, indem man den Quotienten aus den Radikanden des Dividenden und des Divisors mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n \cdot m]{b}$$

Man radiziert eine Wurzel, indem man ihren Radikanden mit dem Produkt aus den Wurzelexponenten radiziert.
Die Wurzelgesetze gelten für die Verbindung des Radizierens mit der Multiplikation und der Division und für das Radizieren von Wurzeln. Man benutzt sie, um Terme mit Wurzeln äquivalent umzuformen.
Auf dem ersten und dem zweiten Wurzelgesetz beruht die Methode des partiellen Radizierens. Dazu schreibt man diese Gesetze in der Form

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Beispiele für die Anwendung der Methode des partiellen Radizierens sind:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{27}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{3}$$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Warum gibt es zum Potenzieren zwei Umkehroperationen?
2. Wie ist $\sqrt[n]{b}$ definiert? (Antworten Sie in einem Satz und mit einer Gleichung!)
3. Warum legt man $\sqrt[n]{b} \geqq 0$ fest?
4. Was für eine Zahl muß b sein, damit $\sqrt[n]{b}$ definiert ist?
5. Durch welche Gleichung wird der Begriff der n-ten Wurzel auf den Potenzbegriff zurückgeführt?
6. Wie schreibt man $\sqrt[n]{a^m}$ als Potenz?
7. Wie nennt man eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten 2?
8. Auf welchen Wurzelgesetzen beruht die Methode des partiellen Radizierens?

Aufgaben

1. Lesen Sie!

Beispiel: $\sqrt{4} = \ldots$

► Die Quadratwurzel aus 4 ist gleich 2.

$\sqrt{25} = \ldots$; $\sqrt{0{,}25} = \ldots$; $\sqrt[3]{8} = \ldots$; $\sqrt[4]{81} = \ldots$;
$\sqrt[5]{32} = \ldots$; $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{b}$; $\sqrt[n]{t}$; $\sqrt[r]{p}$

2. Nennen Sie den Radikanden und den Wurzelexponenten! (Verwenden Sie die Aufgaben von Übung 1.!)

Beispiel: $\sqrt{25}$

► Der Radikand ist 25 und der Wurzelexponent 2.

3. ... auflösen nach ...

Beispiel: $y = x^n$ / nach x

► Wenn man $y = x^n$ nach x auflöst, erhält man $x = \sqrt[n]{y}$.

$c^4 = 16$ / nach c — $\sqrt{c} = \frac{1}{3}$ / nach c
$\sqrt[5]{c} = 3$ / nach c — $y^p = x^q$ / nach y
$\sqrt[n]{a} = b$ / nach a

4. Radizieren Sie partiell! (Beachten Sie $\sqrt{x^2} = |x|$!)

$\sqrt{25b} =$ $\quad\sqrt{125} =$ $\quad\sqrt{100ab} =$ $\quad\sqrt{(a+b)^2} =$ $\quad\sqrt{(a+b)^{2m}} =$
$\sqrt[3]{(a+b)^3} =$ $\quad\sqrt[3]{27p^2} =$ $\quad\sqrt{\frac{32a^3b}{75m^2n^5}} =$

5. Machen Sie den Nenner rational!

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\sqrt{\frac{3}{7}}$
3. $\frac{x^2yz^3}{\sqrt[3]{xy^2z}}$
4. $\frac{1}{\sqrt{b}}$
5. $\frac{4}{\sqrt[4]{2}}$
6. $\frac{a}{\sqrt[n]{a^3}}$
7. $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$
8. $\frac{m \cdot n}{\sqrt[5]{m^3n}}$

6. Bilden Sie eine wahre Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ oder – wenn das nicht möglich ist – eine wahre Implikation $A \rightarrow B$ bzw. $B \rightarrow A$!

Beispiel:
A: a ist eine ganze Zahl.
B: a ist eine natürliche Zahl.
► Wenn a eine natürliche Zahl ist, ist a eine ganze Zahl. ($B \rightarrow A$)

1. A: $\sqrt[n]{y}$ ist definiert.
   B: y ist eine nichtnegative Zahl.
2. A: x_1 und x_2 sind positive Zahlen, und es gilt $x_1 > x_2$.
   B: $x_1^2 > x_2^2$
3. A: $0 \leqq \sqrt[n]{a} \leqq 1$
   B: $0 \leqq a \leqq 1$
4. A: $x > 5$
   B: $\sqrt{x} > 5$
5. A: $x > 0$
   B: $x^2 > 0$

7. Berechnen Sie!

1. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
2. $(3\sqrt{6} - 2\sqrt{5})^2$
3. $\left(\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}\right)^2$
4. $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}}}$

19. Das Logarithmieren

Die zweite Umkehroperation des Potenzierens ist das Logarithmieren. Wenn man $a^n = b$ nach n auflöst, erhält man $n = \log_a b$. In dieser Gleichung ist a die Basis, ist b der Numerus. Der gesuchte Exponent n heißt der Logarithmus.

$\log_a b$ liest man: Logarithmus von b zur Basis a.

$\log_a b$ kann mit folgender Gleichung definiert werden:

▶ **Def.:** $a^{\log_a b} = b$ mit $a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0$

Das bedeutet: $\log_a b$ ist der Exponent, mit dem man die Basis a potenzieren muß, um den Numerus b zu erhalten $(a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$.
Damit ist der Logarithmus so definiert, daß auch das Logarithmieren eindeutig ausführbar ist.
Für die Verbindung des Logarithmierens mit der Multiplikation, der Division, dem Potenzieren und dem Radizieren gelten die Logarithmengesetze. Sie ergeben sich aus den Potenzgesetzen, weil der Logarithmus der Exponent einer Potenz mit gegebener Basis und gegebenem Potenzwert ist:

■ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Faktoren.

■ $\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus den Logarithmen des Dividenden und des Divisors.

■ $\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten dieser Potenz und dem Logarithmus ihrer Basis.

■ $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

Die Logarithmengesetze spielen für das praktische Rechnen mit Logarithmen eine große Rolle.
Auf diesen Gesetzen beruht auch das Rechnen mit dem logarithmischen Rechenstab.
Man kann bei einer festen Basis $a > 0 \wedge a \neq 1$ jedem Numerus $b > 0$ genau einen Logarithmus zuordnen.
In der Mathematik spielen zwei Logarithmensysteme eine besondere Rolle. Sie sind das dekadische Logarithmensystem mit der Basis 10 und das natürliche

Logarithmensystem mit der Basis e. Für die Logarithmen dieser Systeme benutzt man besondere Symbole:

$\log_{10} x = \lg x;\quad \log_e x = \ln x.$

In manchen Lehrbüchern werden auch andere Symbole verwendet. Beim praktischen Rechnen benutzt man meistens das dekadische Logarithmensystem. Die Logarithmen dieses Systems bestehen aus der Kennzahl (vor dem Komma) und der Mantisse (nach dem Komma). Die Näherungswerte der Mantissen sind in Tabellen zusammengefaßt. Wir können mit der Logarithmentafel zu jedem beliebigen Numerus den dekadischen Logarithmus finden.
Man kann aber auch mit Hilfe der dekadischen Logarithmen zu einer beliebigen Basis die Logarithmen berechnen, z. B. $\log_6 85$. Dazu benutzt man den Satz über die Umrechnung von Logarithmensystemen:

Für alle $x > 0$ und alle $a > 1$ und $b > 1$ gilt:

■ $\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a x$

Bei Anwendung dieses Satzes auf das obige Beispiel erhält man:

$$\log_6 85 = \frac{1}{\lg 6} \cdot \lg 85 = \frac{1}{0{,}7782} \cdot 1{,}9294 \approx 2{,}48$$

Beweis des Satzes über die Umrechnung von Logarithmensystemen:

Voraussetzung:

$x > 0;\ a > 1;\ b > 1;$

Behauptung:

$$\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a x$$

$$\log_b x \cdot \log_a b = \log_a x$$

Beweis:

$\log_b x \cdot \log_a b = \log_a (b^{\log_b x}) = \log_a x$ w. z. b. w

Im Sonderfalle $x = a$ erhält man die wichtige Relation:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a a = \frac{1}{\log_a b} \cdot 1$$

■ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

Davon ist wieder ein spezieller Fall: $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie heißt die zweite Umkehroperation des Potenzierens?
2. Wie heißen a, b und n in $\log_a b = n$?

3. Wie ist $\log_a b$ definiert? (Antworten Sie in einem Satz und mit einer Gleichung!)
4. Unter welchen Bedingungen für a und b ist $\log_a b$ definiert?
5. Welche zwei Logarithmensysteme spielen in der Mathematik eine Rolle?

Aufgaben

1. Lesen Sie!

Beispiel: $\log_5 25 = \ldots$

► Der Logarithmus von 25 zur Basis 5 ist gleich 2.

$\log_4 16 = \ldots;$ $\quad \log_2 32 = \ldots;$ $\quad \log_3 81 = \ldots;$
$\log_{10} 100 = \ldots;$ $\quad \log_{10} 0{,}01 = \ldots;$ $\quad \log_p p = \ldots;$
$\log_e 1 = \ldots;$ $\quad \log_a r;$ $\quad \log_b x$

2. Nennen Sie den Numerus und die Basis!
(Verwenden Sie die Aufgaben von Übung 1.!)

Beispiel: $\log_5 25$

► Der Numerus ist 25, und die Basis ist 5.

3. ... auflösen nach ...

Beispiel: $\log_{10} x = 2$ / nach x

► Wenn man $\log_{10} x = 2$ nach x auflöst, erhält man $x = 10^2$.

1. $\log_e x = 0$ / nach x
2. $\log_3 b = 2$ / nach b
3. $\log_a 25 = 2$ / nach a
4. $\log_5 b = 2$ / nach b
5. $\log_{32} x = -0{,}2$ / nach x
6. $\log_a \left(\frac{1}{9}\right) = 2$ / nach a

4. Lösen Sie folgende Gleichungen!

Beispiel: $2^x = 32$

► $x = 5$ ist die Lösung der Gleichung. Wenn man für die Variable x den Wert 5 einsetzt, erhält man die wahre Aussage $2^5 = 32$.

1. $3^x = 81;$
2. $b^x = \sqrt[n]{b};$
3. $5^x = 125;$
4. $a^x = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$
5. $p^x = \frac{1}{p^3};$

5. Berechnen Sie!

1. $\log_5 25 =$
2. $\log_3 \frac{1}{81} =$
3. $\log_p \frac{1}{p} =$
4. $\log_p p =$
5. $\log_p \sqrt[3]{p^2} =$
6. $\log_p p^4 =$
7. $\log_p \sqrt[3]{\frac{1}{p^2}} =$
8. $\log_p \frac{1}{p^5} =$
9. $\log_5 \frac{1}{125} =$
10. $\log_5 0{,}2 =$
11. $\log_5 \sqrt[3]{625} =$
12. $\log_5 50 =$

6. Was folgt aus ...?

Beispiel: $a : b = b : a$

► Aus $a : b = b : a$ folgt, daß $|a| = |b|$ ist.

1. $a^x = 1$
2. $x \cdot e^x = 0$
3. $\log_a x = 1$
4. $a^x = a$
5. $(x - 1) \cdot e^x = 0$
6. $\log_a (x - 1) = 0$
7. $x(x - 1) = 0$
8. $\log_a x = 0$
9. $\log_a (x - 1) = 1$

7. Schreiben Sie folgende Aufgaben unter Verwendung der Logarithmengesetze ($a > 0, b > 0, c > 0, n \in N, m \in N \setminus \{0; 1\}$)

1. $\lg (abc) =$
2. $\lg \frac{a \cdot b}{c} =$
3. $\lg \frac{a}{b \cdot c} =$
4. $\lg \frac{a^n b}{\sqrt[m]{c}} =$
5. $\lg \sqrt[m]{\frac{a \cdot b^n}{c - d}} =$
6. $\lg a - \lg b + \lg c =$
7. $n\left(\lg a + \frac{1}{2} \cdot \lg b - 2 \cdot \lg c\right) =$
8. $3 \cdot \lg 2 + 3 \cdot \lg 5 =$
9. $\frac{1}{3} \cdot \lg 2 - \frac{1}{3} \cdot \lg 32 =$

8. Wieviel Stellen hat 2^{100}?

9. Bilden Sie eine wahre Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ oder – wenn das nicht möglich ist – eine wahre Implikation $A \rightarrow B$ bzw. $B \rightarrow A$!

Beispiel: (siehe Übungen und Aufgaben „Das Radizieren“ Üb. 6.)

1. A: $\lg b$ ist definiert.
   B: $b > 1$
2. A: $\lg b$ ist positiv.
   B: $b > 1$
3. A: $\lg b \geqq 0$
   B: $b > 1$
4. A: $\log_a y$ ist nicht definiert.
   B: Die Basis a ist negativ.
5. A: Der Numerus eines Logarithmus ist negativ.
   B: Der Logarithmus ist nicht definiert.
6. A: a ist eine positive Zahl kleiner als 1.
   B: $\lg a$ ist negativ.

10. Führen Sie direkte Beweise!

Beispiel: Beweisen Sie, daß $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$!

Voraussetzung:

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$\forall (a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge u > 0) : \exists p : \log_a u = p$

$a^p = u \leftrightarrow \log_a u = p; \quad a^q = v \leftrightarrow \log_a v = q$

Behauptung:
$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

Beweis:

$$\begin{aligned}\log_a (uv) &= \log_a (a^p \cdot a^q)\\ &= \log_a (a^{p+q})\\ &= p + q\\ &= \log_a u + \log_a v\end{aligned}$$

w. z. b. w.

1. $\log_a (u : v) = \log_a u - \log_a v$
2. $\lg (u^n) = n \cdot \lg u$
3. $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{a \cdot b}\ (a, b > 0)$
4. Gilt der Satz aus Übung 10.3. auch für alle $a, b \in K$?
5. Wenn Sie die Frage in 10.4. mit nein beantworten, dann erklären Sie, warum man den Beweis von 10.3. nicht für $a, b \in K$ anwenden kann!

11. Berechnen Sie!

1. $\log_2 3 =$;	4. $\log_2 100 =$;	7. $\log_5 23 =$
2. $\log_{12} 7 =$;	5. $\log_{30} 25 =$;	8. $\log_3 0{,}03 =$
3. $\log_2 7{,}3 =$;	6. $\log_{7,5} 15 =$;	9. $\ln 37 =$

12. Bestimmen Sie mit Hilfe der Logarithmentafel folgende Logarithmen!

$\lg 5{,}3$	$\lg 17{,}2$	$\lg 0{,}48$	$\lg 2750$
$\lg 8{,}03$	$\lg 2{,}5 \cdot 10^4$	$\lg 4{,}3 \cdot 10^{-3}$	$\lg 2{,}34 \cdot 10^{-6}$

13. Bestimmen Sie die Numeri mit der Logarithmentafel!

$\lg x = 0{,}3010$	$\lg x = 2{,}6064$	$\lg x = 0{,}8756 - 2$
$\lg x = 0{,}8269$	$\lg x = 0{,}0250 - 6$	$\lg x = -4{,}3979$

20. Die Menge R der reellen Zahlen

20.1. Begriff der reellen Zahl und Eigenschaften der Menge R

Das Radizieren und das Logarithmieren sind in der Menge der rationalen Zahlen nicht immer ausführbar. Die meisten Wurzelwerte und Logarithmen sind keine rationalen Zahlen, denn man kann sie nicht als Quotienten aus zwei ganzen Zahlen bzw. als unendliche periodische oder endliche Dezimalzahlen darstellen. Das gilt z. B. für $\sqrt{2}$.

Die Zahl $\sqrt{2}$ existiert aber wirklich (reell). Es ist der Zahlenwert der Diagonalen eines Quadrates, dessen Seitenlänge eine Längeneinheit beträgt. Dieses Quadrat kann man konstruieren, und nach dem Lehrsatz des Pythagoras kann man die Länge seiner Diagonalen berechnen.

Man nennt die Zahl $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl. Auch $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}$, $\log_2 5$, $\log_7 3$, ... sind irrationale Zahlen.

■ Irrationale Zahlen sind unendliche nichtperiodische Dezimalzahlen.

In der Praxis kann man nicht mit unendlichen Dezimalzahlen rechnen. Man nähert deshalb irrationale Zahlen durch rationale Zahlen an und benutzt diese rationalen Näherungswerte, die man beliebig genau machen kann, für die praktischen Berechnungen. (Beispielsweise kann man die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ durch die rationalen Zahlen 1,4; 1,41; 1,414; ...; 1,4142135 usw. annähern.) Selbstverständlich erhält man dabei keine genauen Resultate. Man kann aber den Fehler, den ein solches Resultat enthält, durch Benutzung entsprechend genauer Näherungswerte so klein machen, daß er für das gegebene Problem keine praktische Bedeutung hat.

Alle positiven und negativen irrationalen Zahlen bilden eine unendliche Menge U.

■ Die Vereinigungsmenge $R = K \cup U$ der Menge K der rationalen Zahlen mit der Menge U aller irrationalen Zahlen heißt die Menge R der reellen Zahlen.

Man kann jeder irrationalen Zahl genau einen Punkt einer Geraden zuordnen. Man findet z. B. den Bildpunkt von $\sqrt{2}$ durch folgende Konstruktion:

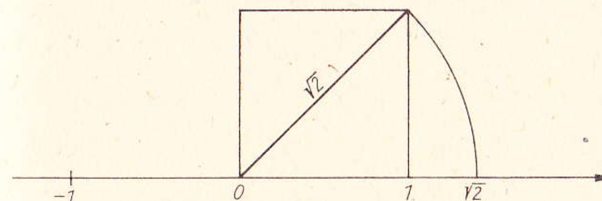


Abb. 20.1. Der Bildpunkt von $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden

Der Bildpunkt von $-\sqrt{2}$ liegt dann in gleichem Abstand auf der anderen Seite vom Nullpunkt.

Auf der Zahlengeraden liegen die Bildpunkte der irrationalen Zahlen zwischen den Bildpunkten der rationalen Zahlen. Jeder reellen Zahl ist dadurch genau ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet. Umgekehrt ist jetzt aber auch jedem Punkt der Zahlengeraden genau eine reelle Zahl zugeordnet.

■ Die reellen Zahlen und die Punkte der Zahlengeraden sind einander eineindeutig zugeordnet.

Die Menge R ist eine unendliche, geordnete Menge.

20.2. Die Rechenarten in R

Die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation, die Division (mit Ausnahme der Division durch 0), das Potenzieren, das Radizieren von nichtnegativen Radikanden und das Logarithmieren von positiven Numeri zu Basen a mit $a > 0$ und $a \neq 1$ ist in R immer eindeutig ausführbar.

Merken Sie sich:

■ In R sind nicht definiert:
1. Die Division durch 0,
2. das Radizieren von negativen Radikanden,
3. das Logarithmieren von nichtpositiven Numeri.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Was für Zahlen sind viele Wurzeln und Logarithmen?
2. Welche Dezimalzahlen sind irrationale Zahlen?
3. Was macht man in der Praxis, um mit irrationalen Zahlen rechnen zu können?
4. Welche Zahlen gehören zu den reellen Zahlen?
5. Was für eine Zuordnung besteht zwischen den reellen Zahlen und den Punkten der Zahlengeraden?
6. Warum ist die Menge R der reellen Zahlen eine geordnete Menge?
7. Welche Rechenoperationen sind in R stets ausführbar?
8. Welche Operationen sind in R nur unter bestimmten Bedingungen ausführbar?
9. Für welche reellen Zahlen sind das Dividieren, das Radizieren und das Logarithmieren in R nicht definiert?

Aufgaben

1. ... ist in R für ... nicht definiert

Beispiel: Die Potenz a^0 ...

► Die Potenz a^0 ist in R für $a = 0$ nicht definiert.

Die Wurzel $\sqrt[n]{b}$ ...

Der Quotient $\frac{a}{b}$ ...

Die Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ ...

Der Logarithmus $\log_3 b$ ...

2. zu/ordnen D, A

Beispiel: natürliche Zahl / Punkt auf der Zahlengeraden

► Man kann jeder natürlichen Zahl einen Punkt auf der Zahlengeraden zuordnen. Man kann aber nicht jedem Punkt auf der Zahlengeraden eine natürliche Zahl zuordnen. Die Zuordnung von natürlichen Zahlen und Punkten auf der Zahlengeraden ist eindeutig, aber nicht eineindeutig.

ganze Zahl / Punkt auf der Zahlengeraden
rationale Zahl / Punkt auf der Zahlengeraden
reelle Zahl / Punkt auf der Zahlengeraden

3. Warum muß man die Zahlenbereiche erweitern?

Beispiel: Menge N der natürlichen Zahlen / Menge G der ganzen Zahlen

► Man muß die Menge N der natürlichen Zahlen zur Menge G der ganzen Zahlen erweitern, damit die Subtraktion immer ausführbar ist.

Menge G der ganzen Zahlen / Menge K der rationalen Zahlen
Menge K der rationalen Zahlen / Menge R der reellen Zahlen

4. Korrigieren Sie die folgenden falschen Aussagen!

Beispiel: Aus der Gleichung $\ln x = 0$ folgt, daß $x = 0$ ist.

► Aus der Gleichung $\ln x = 0$ folgt, daß $x = 1$ ist.

Aus der Gleichung $\ln x = 1$ folgt, daß $x = 1$ ist.

Wenn der dekadische Logarithmus einer Zahl negativ ist, so ist diese Zahl eine negative reelle Zahl.

Wenn der dekadische Logarithmus von einem Numerus negativ ist, so ist dieser Numerus eine positive rationale Zahl kleiner als 1.

$\lg(-x)$ ist für alle reellen x definiert.

$\lg(-x)$ ist für alle reellen x nicht definiert.

5. Wie wählt man x, um eine reelle Lösung y zu erhalten?

► $y = \sqrt[n]{x}$

In der Gleichung $y = \sqrt[n]{x}$ wählt man $x \geqq 0$, um eine reelle Lösung y zu erhalten.

1. $y = \sqrt[n]{(-x)}$
2. $y = \lg x$
3. $y = \lg(3 - x)$
4. $y = \frac{25}{\sqrt{x}}$
5. $y = \frac{10}{x - 7}$

21. Das indirekte Beweisverfahren

Wir haben bereits behauptet, daß das Radizieren von positiven rationalen Zahlen in der Menge K nicht immer ausführbar ist. Die Wahrheit dieser Behauptung wollen wir zeigen, indem wir beweisen, daß $\sqrt{2}$ kein Element aus K ist.

Die Aussage „$\sqrt{2} \notin K$" ist äquivalent mit der Aussage „$\sim \exists x \in K: x = \sqrt{2}$". Aussagen dieser Form nennt man **negierte Existenzaussagen**. Wenn wir diese negierten Existenzaussagen direkt beweisen wollten, müßten wir für alle rationalen Zahlen

zeigen, daß sie nicht gleich $\sqrt{2}$ sind. Da es unendlich viele rationale Zahlen gibt, ist das nicht möglich.
Negierte Existenzaussagen beweist man daher oft indirekt. Beim indirekten Beweisverfahren benutzt man die Eigenschaft der mathematischen Logik, zweiwertig zu sein. Das bedeutet, daß entweder die Aussage A wahr ist und die logische Negation $\sim A$ falsch ist, oder die Aussage A falsch ist und die Negation $\sim A$ wahr ist. Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

Zum Beispiel:

A:	$3 < 4$	wahr	$\sim A$:	$3 \geqq 4$	falsch
B:	$-5 \in N$	falsch	$\sim B$:	$-5 \notin N$	wahr
C:	$5 + 5 \neq 10$	falsch	$\sim C$:	$5 + 5 = 10$	wahr

Wie beim direkten Beweisverfahren werden auch beim indirekten Beweisverfahren Voraussetzungen und eine Behauptung B aufgestellt. Man beweist jetzt aber die Behauptung B **indirekt**, indem man zeigt, daß die Negation $\sim B$ falsch ist. $\sim B$ bezeichnet man als **Gegenannahme** zur Behauptung.
Bei der Beweisführung formt man in der Regel die Gegenannahme $\sim B$ nach logischen Gesetzen um, bis man eine Aussage erhält, die im Widerspruch zu einer Definition, einem bewiesenen Satz oder einer Voraussetzung steht. Weil man den Widerspruch durch logisches Umformen der Gegenannahme erhält, muß die Gegenannahme $\sim B$ falsch sein. Daraus folgt aber, daß die Behauptung B wahr ist.
Es ergibt sich für einen indirekten Beweis folgende Handlungsanweisung:

■ 1. Analysiere den Sachverhalt! Schreibe Voraussetzung und Behauptung B auf!
2. Formuliere die Gegenannahme $\sim B$!
3. Führe die Gegenannahme $\sim B$ durch logische Umformung zu einem Widerspruch!

Diese Handlungsanweisung wollen wir auf den Beweis von „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl" anwenden. In die Voraussetzung schreiben wir Sätze oder Definitionen, die in engem Zusammenhang mit dem Problem stehen, in diesem Falle u. a. die Definition der rationalen Zahlen.

Voraussetzung:

(1) $a \in K \leftrightarrow \exists(p, q \in G): \frac{p}{q} = a$
(2) p und q (aus (1)) haben keinen gemeinsamen Teiler
(3) $(z \text{ Primzahl} \wedge z \mid g^2) \rightarrow z \mid g$ mit $z, g \in G$

Behauptung B: $\sqrt{2} \notin K$

Gegenannahme $\sim B$: $\sqrt{2} \in K$

Mit anderen Worten:

$$\exists(p, q \in G): \frac{p}{q} = \sqrt{2},$$

wobei p und q keinen gemeinsamen Teiler haben.

Beweis:

Wir führen die Gegenannahme durch Umformung zu einem Widerspruch.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$
$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$
$2q^2 = p^2$, das bedeutet $2 \mid p^2$, also nach (3) $2 \mid p$,
deshalb ist $p = 2m$ mit $m \in G$. (4)
$$2q^2 = (2m)^2$$
$$2q^2 = 4m^2$$
$q^2 = 2m^2$, das bedeutet $2 \mid q^2$, also $2 \mid q$,
deshalb ist $q = 2r$ mit $r \in G$. (5)

(4) und (5) bedeuten, daß p und q den gemeinsamen Teiler 2 haben. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (2).
Daraus ergibt sich, daß die Aussage „p und q haben den gemeinsamen Teiler 2" falsch ist. Da wir diese falsche Aussage durch logisches Umformen der Gegenannahme erhalten haben, muß die Gegenannahme $\sqrt{2} \in K$ falsch sein. Also muß $\sqrt{2} \notin K$ gelten.

w. z. b. w.

Der Beweis zeigt erneut, daß man beim Beweisen viele mathematische Kenntnisse anwenden muß, auch wenn sie nicht in der Voraussetzung stehen. So haben wir zwar die Voraussetzungen (1), (2) und (3) formuliert, aber auch die Definition der Teilbarkeit oder die Implikation „$a \cdot b \mid c \rightarrow a \mid c$" werden beim Beweis verwandt. In die Voraussetzung schreibt man also die im mathematischen Satz formulierte Voraussetzung und weitere mathematische Sätze oder Definitionen, die beim Beweis gebraucht werden, die man nicht für trivial hält und deren Herleitung im Beweis den Gedankengang unterbrechen würde.

Beweis einer Kontraposition

In der mathematischen Literatur wird der Begriff „indirekter Beweis" auch bei einer anderen Art von Beweisen benutzt. Bekanntlich sind die Implikation „Wenn A, so B" und ihre Kontraposition „Wenn $\sim B$, so $\sim A$" äquivalent. Statt „Wenn A, so B" zu beweisen, kann man auch „Wenn $\sim B$, so $\sim A$" beweisen. Auch für diese Methode findet man den Begriff „indirekter Beweis", was aber eigentlich nicht richtig ist, wenn dieser Beweis direkt geführt wird.

Beispiel:

Beweisen Sie die Implikation:

Wenn zwei ganze Zahlen q und p keinen gemeinsamen Teiler haben, dann haben auch $q - p$ und q keinen gemeinsamen Teiler.

Kontraposition:

Wenn $q - p$ und q einen gemeinsamen Teiler haben, so haben auch q und p einen gemeinsamen Teiler.

Voraussetzung:

$\exists(x, s, t \in G) : (q - p = x \cdot s \text{ und } q = x \cdot t)$

Behauptung:

$\exists(y, a, b \in G) : (p = y \cdot a \text{ und } q = y \cdot b)$

Beweis:

$p = q - (q - p) = x \cdot t - x \cdot s = x(t - s)$ mit $t - s \in G$

p hat den Teiler x, und nach der Voraussetzung hat auch q den Teiler x. Also haben p und q einen gemeinsamen Teiler.

w. z. b. w.

Der Ansatz $p = q - (q - p)$ wurde nicht zufällig gewählt, sondern ergibt sich logisch aus der Aufgabe. Über q und $q - p$ sind Aussagen bekannt. Wir behaupten, daß p und q einen gemeinsamen Teiler haben. Also muß man versuchen, p mit Hilfe der Voraussetzung umzuformen.
Nach Durchführung des Beweises sieht man, daß man die Kontraposition noch schärfer (spezieller) formulieren kann: Wenn $q - p$ und q einen gemeinsamen Teiler haben, so haben auch q und p **diesen** Teiler gemeinsam.
Der Beweis der Kontraposition erfolgte direkt. Weil die Implikation selbst eine negierte Existenzaussage ist, könnte sie auch mit dem oben gezeigten indirekten Beweisverfahren bewiesen werden.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welchen Wahrheitswert hat die Negation einer wahren Aussage?
2. Welchen Wahrheitswert hat die Negation einer falschen Aussage?
3. Was bedeutet „zweiwertige Logik"?
4. Was bedeutet: Man beweist eine Behauptung indirekt?
5. In welchen Schritten führt man einen indirekten Beweis?
6. Welche Sätze und Definitionen schreibt man in die Voraussetzung eines Beweises? Sind das alle Sätze, die man beim Beweis benutzt?
7. Bei welchen Sätzen führt man oft einen indirekten Beweis?
8. Warum ist der Beweis einer Implikation durch den Beweis der zugehörigen Kontraposition möglich?

Aufgaben

1. ... das indirekte Beweisverfahren benutzen ...

$\sqrt{2} \notin K$

► Zum Beweis der negierten Existenzaussage $\sqrt{2} \notin K$ benutzt man das indirekte Beweisverfahren.

$\sqrt{3} \notin K$; $\lg 2 \notin K$; $\sqrt[3]{4} \notin K$; $\ln 5 \notin K$

2. ... zum Widerspruch führen ...

Es wird behauptet, daß $\sqrt{2} \notin K$ ist.

► Man geht von der Gegenannahme aus, daß $\sqrt{2} \in K$ ist, und führt diese Gegenannahme zum Widerspruch.

Es wird behauptet, daß ... (Beispiele aus Übung 1.)

3. ... im Widerspruch stehen dazu, daß ...

$\lg x$ ist in R definiert / $x < 0$

► „$x < 0$" steht im Widerspruch dazu, daß „$\lg x$ in R definiert ist".

1. $a > 3$ / $a = 3$
2. $a \in G$ / $a \notin K$
3. $a = 10$ / a ist Primzahl
4. $r = ay$ und $s = ax$ / r, s haben keinen gemeinsamen Teiler
5. $a < b$ / ...
6. $\lg x > 1$ / ...

4. Negieren Sie folgende Aussagen!

$5 < q$

► Die Negation von $5 < q$ ist $5 \geqq q$.

1. $a \in G$
2. $t \notin R$
3. $T \subseteq M$
4. $a < b$ und $b = 7$
5. $a = c$ oder $m = s$
6. t ist keine Primzahl

5. Beweisen Sie indirekt!

1. $\sqrt{3}$ ist keine rationale Zahl.
2. $\lg 5$ ist keine rationale Zahl.
3. Wenn zwei ganze Zahlen p und q keinen gemeinsamen Teiler haben, dann haben auch $q - p$ und q keinen gemeinsamen Teiler.

Funktionen

22. Begriff der Funktion

Wir wollen uns mit einem wichtigen Begriff der Mathematik, mit dem Begriff der Funktion, befassen. Zum Verständnis dieses Begriffes sind einige neue Begriffe nötig.

22.1. Geordnete Paare

Wenn man zwei Mengen M und N hat, so kann man einem Element $x \in M$ ein Element $y \in N$ zuordnen. Diese Zuordnung bedeutet die Bildung eines geordneten Paares $(x; y)$. Dieses Paar heißt geordnet, weil die Reihenfolge der Elemente des Paares nicht beliebig ist. Zwei geordnete Paare $(x_1 y_1)$ und $(x_2; y_2)$ sind dann und nur dann gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ gilt. Das bedeutet, daß im allgemeinen $(x_1; y_1) \neq (y_1; x_1)$ ist. Es sind z. B. die geordneten Paare (3; 4) und (4; 3) nicht gleich. Dadurch unterscheiden sich geordnete Paare von Mengen aus zwei Elementen; denn für Mengen gilt $\{3; 4\} = \{4; 3\}$.

22.2. Abbildungen

■ Wenn man den Elementen x einer Menge M die Elemente y einer Menge N zuordnet, so sagt man: Man bildet die Menge M auf die Menge N ab.

Eine Abbildung einer Menge M auf eine Menge N ist also eine Menge von geordneten Paaren.

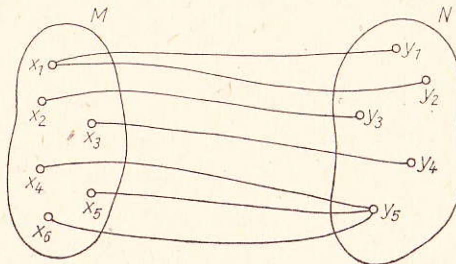


Abb. 22.1. Abbildung einer Menge M auf eine Menge N

Die Zeichnung zeigt eine Abbildung A von der Menge M auf die Menge N:

$$A = \{(x_1; y_1);\ (x_1; y_2);\ (x_2; y_3);\ (x_3; y_4);\ (x_4; y_5);\ (x_5; y_5);\ (x_6; y_5)\}$$

Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

$$M = \{1; 2; 3; 4\} \qquad N = \{a; b; c\}$$
$$A_1 = \{(1; a);\ (1; b);\ (2; c);\ (3; c);\ (4; c)\}$$
$$A_2 = \{(1; a);\ (2; a);\ (3; b);\ (4; c)\}$$
$$A_3 = \{(1; c);\ (2; b);\ (3; b);\ (4; a)\}$$

Bei einer Abbildung A von einer Menge M auf eine Menge N nennt man die Menge M den Definitionsbereich der Abbildung A (Symbol) $D(A)$ und die Menge N den Wertebereich der Abbildung A (Symbol: $W(A)$).

22.3. Eindeutige Abbildungen

Besondere Bedeutung kommt den Abbildungen zu, die eindeutig sind.

► **Def.:** Eine Abbildung A heißt eindeutig, wenn jedem Element aus dem Definitionsbereich genau ein Element aus dem Wertebereich zugeordnet wird.

Mit anderen Worten: Eine Abbildung A heißt eindeutig, wenn es zu jedem Element aus dem Definitionsbereich genau ein geordnetes Paar gibt.
Die oben dargestellte Abbildung A ist nicht eindeutig, weil dem Element $x_1 \in D(A)$ die Elemente $y_1 \in W(A)$ und $y_2 \in W(A)$ zugeordnet werden. Auch A_1 ist nicht eindeutig, weil es zu dem Element 1 die geordneten Paare $(1; a)$ und $(1; b)$ gibt. Die Abbildungen A_2 und A_3 sind eindeutig.

22.4. Graphische Darstellung geordneter Paare

Im Text „Die Menge R der reellen Zahlen“ wurde gezeigt, daß man jeder reellen Zahl eineindeutig einen Punkt auf der Zahlengeraden zuordnen kann.
Außer Zahlen muß man aber auch Zahlenpaare graphisch darstellen. Dazu verwendet man ein Koordinatensystem. Ein wichtiges Koordinatensystem ist das

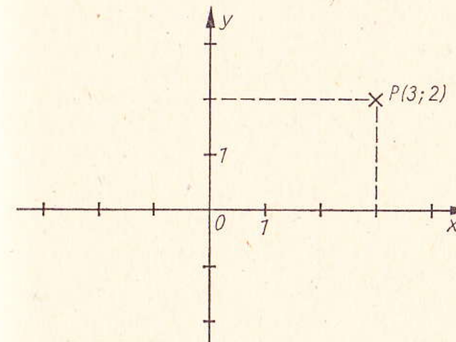


Abb. 22.2. Kartesisches Koordinatensystem

kartesische Koordinatensystem. Beim kartesischen Koordinatensystem schneiden sich zwei Geraden, die Abszissenachse und die Ordinatenachse, rechtwinklig im Koordinatenursprung. Außerdem sind die Einheiten auf der x-Achse und der y-Achse gleich. Durch das kartesische Koordinatensystem wird jedem Punkt der Ebene eindeutig ein Zahlenpaar $(x; y)$ zugeordnet. Es gehört aber auch zu jedem Zahlenpaar $(x; y)$ genau ein Punkt der Ebene. Diese Zuordnung ist demnach umkehrbar eindeutig oder eineindeutig. Die reellen Zahlen x_0 und y_0 sind die Koordinaten des Punktes P_0, wobei x_0 die Abszisse und y_0 die Ordinate ist. Man schreibt dafür auch $P_0\ (x_0; y_0)$.
Das kartesische Koordinatensystem ist nur eines von vielen Koordinatensystemen. Es ist aber das Koordinatensystem, das am meisten verwendet wird.

22.5. Definition des Funktionsbegriffs

Mit Hilfe des Abbildungsbegriffs definiert man den Begriff „Funktion".

> ▶ **Def.:** Eine Funktion f ist eine eindeutige Abbildung von einer Menge X auf eine Menge Y. Dabei ist $X = D(f)$ und $Y = W(f)$.

Durch eine Funktion wird demnach jedem Element des Definitionsbereichs genau ein Element des Wertebereichs zugeordnet. Das Element x in dem geordneten Paar $(x; y) \in f$, für das jedes Element des Definitionsbereichs eingesetzt werden kann, wird unabhängige Variable genannt. Dementsprechend heißt y abhängige Variable.
Wenn man die Zuordnung durch eine Gleichung $y = f(x)$ (gelesen: y gleich f von x) angeben kann, nennt man die Funktion analytisch darstellbar. Die Gleichung $y = f(x)$ wird als Funktionsgleichung bezeichnet.

Beispiel:

$$y = x^2 + 1 \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2 + 1.$$

Nicht jede Funktion kann durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden. Ein Beispiel dafür ist eine eindeutige (sogar eineindeutige) Abbildung der Menge R der reellen Zahlen auf die Menge der Punkte einer Geraden.
Wenn der Zahl x_0 aus dem Definitionsbereich $D(f)$ durch die Gleichung $y = f(x)$ die Zahl y_0 zugeordnet wird, so heißt y_0 der Wert der Funktion f an der Stelle $x = x_0$.
Man schreibt für y_0 auch $f(x_0)$. So hat z. B. die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$y = f(x)$$
$$= x^2 - 4$$

an der Stelle $x_0 = 1$ den Wert $y_0 = -3$, denn es ist

$$y_0 = f(1) = 1^2 - 4 = -3.$$

Oft sind bei Funktionen Definitionsbereich und Wertebereich echte Teilmengen der Menge der reellen Zahlen, oder sie sind auch gleich der Menge R. Solche

Funktionen heißen reelle Funktionen. Wenn dabei über den Definitionsbereich keine besonderen Festlegungen getroffen werden, betrachtet man im allgemeinen diejenigen reellen Zahlen als Elemente des Definitionsbereichs, denen durch die Funktionsgleichung ein bestimmter Wert zugeordnet werden kann, also den größtmöglichen Definitionsbereich.

22.6. Arten der Darstellung von Funktionen

Wir haben den Begriff der Funktion mit Hilfe der Abbildungen definiert. Funktionen sind also Mengen geordneter Paare. Deshalb ist die Angabe geordneter Paare die natürliche Form der Darstellung einer Funktion. Wenn aber der Definitionsbereich eine unendliche Menge ist, so ist die vollständige Angabe der Wertepaare (der geordneten Paare) nicht möglich. Sehr oft genügt schon die Angabe einer endlichen Menge von Wertepaaren (eine Wertetabelle oder Wertetafel), um wichtige Aussagen über die Funktion machen zu können.

Beispiel:

Man mißt den Weg y eines Körpers, der sich auf einer Geraden bewegt. Nach einer Sekunde hat dieser Körper 0,5 m, nach 2 Sekunden 2 m, nach 3 Sekunden 4,5 m und nach 4 Sekunden 8 m zurückgelegt. Diese Messungen kann man in der folgenden Wertetabelle zusammenfassen:

x (Zeit in s)	0	1	2	3	4
y (Weg in m)	0	0,5	2	4,5	8

Bei Untersuchung dieser Wertetabelle kann man erkennen, daß der Zusammenhang zwischen der Zeit x und dem Weg y für $0 \leq x \leq 4$ durch die Funktionsgleichung $y = \frac{x^2}{2}$ dargestellt werden kann.
In der Mathematik geht man meist den umgekehrten Weg.
Man gibt zuerst die Funktionsgleichung, stellt dann eine Wertetabelle auf und stellt schließlich die Funktion graphisch dar.
Bei Funktionsgleichungen unterscheidet man die explizite und implizite Form. Wenn eine Funktionsgleichung nach der abhängigen Variablen aufgelöst ist, so heißt diese Form die explizite Form der Funktionsgleichung.
Beispiel:

$$y = f(x) = x^2 + 3$$

Wenn eine Funktionsgleichung nicht nach der abhängigen Variablen aufgelöst ist, so heißt diese Form die implizite Form der Funktionsgleichung. Man schreibt oft $F(x; y) = 0$.
Zum Beispiel:

$$F(x; y) = y - x^2 - 3 = 0$$

Man kann eine Funktion durch einen Graph darstellen, weil man jedem Zahlenpaar $(x; y)$ eindeutig einen Punkt im kartesischen Koordinatensystem zuordnen kann. Ein Graph stellt aber nur dann den Graph einer Funktion f dar, wenn es zu jedem Wert $x \in D(f)$ genau einen Wert $y \in W(f)$ gibt.

Das bedeutet geometrisch, daß der Graph einer Funktion von x mit jeder Parallelen zur y-Achse höchstens einen gemeinsamen Punkt haben kann.

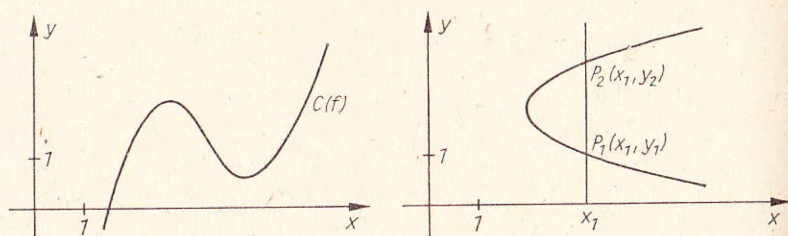


Abb. 22.3. Graph einer Funktion f mit der unabhängigen Variablen x und Graph einer Abbildung A, die keine Funktion der unabhängigen Variablen x ist

■ Eine analytisch darstellbare Funktion kann man in der Form

$$f = \{(x; y) \mid y = f(x);\ x \in D(f)\}$$

schreiben.

Beachten Sie:

Eine Funktionsgleichung stellt keine Funktion dar, sondern nur die Zuordnungsvorschrift, mit deren Hilfe die Funktion gebildet werden kann. Auch die Begriffe Funktion und Graph der Funktion darf man nicht identifizieren. Allerdings spricht man oft verkürzt und ungenau z. B. von der Funktion $y = x^2$, statt von der Funktion f mit der Gleichung $y = x^2$.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Warum heißt das Paar $(x; y)$ einer Abbildung „geordnetes Paar"?
2. Unter welcher Bedingung sind zwei geordnete Paare $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ gleich?
3. Was erhält man, wenn man den Elementen $x \in M$ die Elemente $y \in N$ zuordnet?
4. Welche Menge ist der Definitionsbereich einer Abbildung A, wenn man die Menge M auf die Menge N abbildet?
5. Welche Menge ist der Wertebereich einer Abbildung A, wenn man die Menge M auf die Menge N abbildet?
6. Wie ist eine eindeutige Abbildung definiert?
7. Wozu ist ein Koordinatensystem notwendig?
8. Was bedeutet: Die Zuordnung zwischen den Punkten der Ebene in einem kartesischen Koordinatensystem und den geordneten Zahlenpaaren $(x; y)$ ist umkehrbar eindeutig?
9. Wie nennt man x_0 und y_0 in $P_0(x_0; y_0)$?
10. Wie definiert man den Begriff „Funktion"?
11. Wie nennt man die Gleichung $y = f(x)$?

12. Welche Namen haben die Variablen x und y in $y = f(x)$?
13. Warum stellt die Gleichung $y^2 = 3x$ für nichtnegative x keine Funktionsgleichung $y = f(x)$ dar?
14. Welche drei Formen der Darstellung einer Funktion gibt es?
15. Welche Formen können die Funktionsgleichungen einer Funktion haben?
16. Charakterisieren Sie die explizite Form der Funktionsgleichung!
17. Warum darf man die Begriffe „Funktion" und „Graph einer Funktion" nicht identifizieren?
18. Welcher Unterschied besteht zwischen Funktion und Funktionsgleichung?

Aufgaben

1. Gegeben ist das Mengendiagramm der Abbildung A:

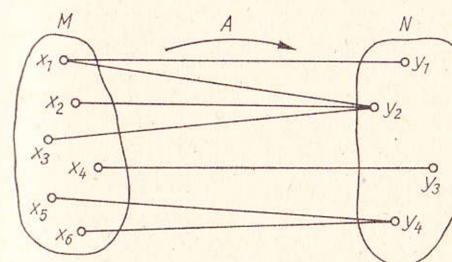


Abb. 22.4.

1.1. Nennen Sie die Zuordnungen in der gegebenen Abbildung A!
► Dem Element $x_1 \in M$ wird das Element $y_1 \in N$ zugeordnet.

1.2. Schreiben Sie die Abbildung A als Menge von geordneten Paaren auf!

1.3. Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Abbildung A an!

2. Gegeben sind die Abbildungen:
$A_1 = \{(a;\ 1),\ (b;\ 2),\ (c;\ 0),\ (d;\ 5),\ (e;\ 4)\}$,
$A_2 = \{(a;\ 1),\ (b;\ 1),\ (c;\ 1)\}$,
$A_3 = \{(x_1;\ y_2),\ (x_1;\ y_3),\ (x_2;\ y_5)\}$,
$A_4 = \{(0;\ 3),\ (1;\ 2),\ (4;\ 3),\ (2;\ 2)\}$.

2.1. Welche Abbildungen sind
a) nicht eindeutig,
b) eindeutig?

2.2. Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der Abbildungen A_1 bis A_4!

2.3. Welche Abbildungen A_1 bis A_4 sind Funktionen?
Begründen Sie Ihre Antwort!

2.4. Stellen Sie die Abbildung A_4 in einem kartesischen Koordinatensystem graphisch dar!

2.5. Warum ist die Menge $A_5 = \{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 9;\ 10\}$ keine Abbildung?

3. Berechnen Sie die Funktionswerte von f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^2 - 4$ an folgenden Stellen des Definitionsbereichs:

$x_0 = -2;\quad x_1 = -1;\quad x_2 = 0;\quad x_3 = 1;\quad x_4 = 2;\quad x_5 = 3!$

Antworten Sie in einem Satz!

► Der Funktionswert y_0 von f an der Stelle $x_0 = -2$ ist $y_0 = f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$.
(gelesen: „... ist y_0 gleich f an der Stelle -2 gleich ...“)

4. Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^2 - 2$ und $D(f) = R$.

4.1. Stellen Sie zur Funktion f für $x \in [-3;\ +2]$ und $x \in G$ eine Wertetabelle auf!

4.2. Stellen Sie die Funktion f im Intervall $[-3;\ +2]$ graphisch dar!

5. Geben Sie an, in welcher Form die folgenden Funktionsgleichungen gegeben sind!
Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $y = x - 7$	3. $y + 3 = x - 6$	5. $x + y = 1$
2. $y = x^2 + x - 1$	4. $x = y$	6. $x^2 + xy + y^2 = 0$

6. Schreiben Sie folgende Funktionsgleichungen in expliziter Form $y = f(x)$ auf!

1. $x + y + 1 = 0$	$x, y \in R$
2. $x^2 + y^2 - r^2 = 0$	$\lvert x\rvert \leqq r$ und $0 \leqq y \leqq r$
3. $x^2 - y^2 - 1 = 0$	$x \geqq 1$ und $y \geqq 0$
4. $y^2 - x = 0$	$x \geqq 0$ und $y \leqq 0$

7. Bei einer reellen Funktion f mit $y = f(x)$ sind keine besonderen Festlegungen über den Definitionsbereich gemacht worden. Welche reellen Zahlen nimmt man im allgemeinen als Elemente des Definitionsbereichs dieser reellen Funktion f?

23. Zahlenfolgen

Wichtige reelle Funktionen sind die Zahlenfolgen.

23.1. Definition und analytische Darstellung einer Zahlenfolge

► **Def.:** Eine unendliche Zahlenfolge ist eine reelle Funktion f, deren Definitionsbereich N oder N^+ ist.

Eine Zahlenfolge kann in der Form

$$f = \{(n;\, a_n) \mid a_n = f(n) \wedge n \in D(f) \subseteq N\}$$

geschrieben werden.
Da man für die unabhängige Variable nur natürliche Zahlen einsetzen darf, bezeichnet man sie mit n; für die abhängige Variable verwendet man das Symbol a_n. Als abgekürzte Darstellung einer Zahlenfolge ergibt sich:

$$(a_n) = a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots$$

Beispielsweise schreibt man für die beiden Zahlenfolgen

(1) $$f = \left\{(n;\, a_n) \mid a_n = f(n) = \frac{n-1}{n} \wedge n \in N \setminus \{0\}\right\};$$

(2) $$f = \left\{(n;\, a_n) \mid a_n = f(n) = \frac{1}{n} \wedge n \in N \setminus \{0\}\right\}$$

die abgekürzte Form

(1) $$(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right) = 0;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \ldots \quad n \geqq 1$$

(2) $$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots \quad n \geqq 1$$

Die Funktionswerte einer Zahlenfolge f heißen Glieder der Zahlenfolge. a_n nennt man das allgemeine Glied von f.

23.2. Graphische Darstellung einer Zahlenfolge

Wenn man eine Zahlenfolge f mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems graphisch darstellt, erhält man keinen zusammenhängenden Graph. Der Graph einer Zahlenfolge ist eine unendliche Punktmenge, die aus isoliert liegenden Punkten $P\ (n;\ a_n)$ der Koordinatenebene besteht.

Beispielsweise ergibt sich für die Zahlenfolge (1):

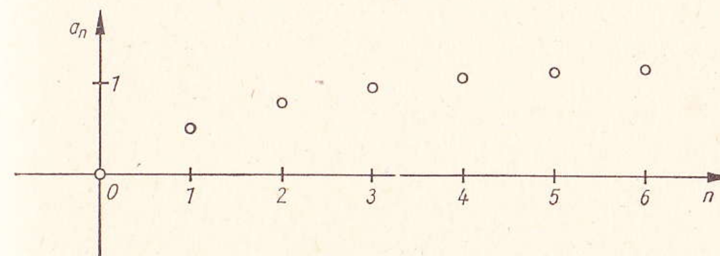


Abb. 23.1. Graph einer Zahlenfolge im Koordinatensystem

Oft stellt man nur die Glieder a_n auf einer Zahlengeraden dar.

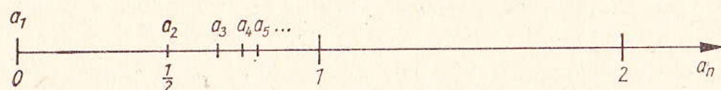


Abb. 23.2. Darstellung der Glieder a_n auf einer Zahlengeraden

23.3. Arten von Zahlenfolgen

23.3.1. Monotone Zahlenfolgen

Bei der Zahlenfolge (1) ist jedes Glied a_n kleiner als das unmittelbar folgende Glied a_{n+1}. Man sagt, daß die Zahlenfolge (1) streng monoton wächst.

> ▶ **Def.:** Die Zahlenfolge f heißt streng monoton wachsend
> $\leftrightarrow \forall n \in D(f): a_n < a_{n+1}$

Andere streng monoton wachsende Zahlenfolgen sind:

(3) $(a_n) = (n) = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots$

(4) $(a_n) = \left(\frac{n^2 + n}{5n - 1}\right) = \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{6}{7};\ \frac{20}{19};\ \frac{5}{4};\ \ldots$

(5) $(a_n) = \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999;\ \ldots$

(6) $(a_n) = \left(2 + \frac{n}{3}\right) = \frac{7}{3};\ \frac{8}{3};\ \frac{9}{3};\ \frac{10}{3};\ \frac{11}{3};\ \ldots$

Anmerkung: Bei den Zahlenfolgen (3) bis (6) ist kein Definitionsbereich angegeben worden. Wenn dies der Fall ist, wählen wir immer als Definitionsbereich $N \setminus \{0\}$.

Die Zahlenfolge (2) ist eine streng monoton fallende Zahlenfolge; denn für alle n aus dem Definitionsbereich gilt:

$$a_n > a_{n+1}$$

> ▶ **Def.:** Die Zahlenfolge f heißt streng monoton fallend
> $\leftrightarrow \forall n \in D(f): a_n > a_{n+1}$

Auch die Zahlenfolgen (7) bis (10) sind streng monoton fallend:

(7) $(a_n) = \left(\frac{n + 1}{n}\right) = 2;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{6}{5};\ \ldots$

(8) $(a_n) = (-n^2) = -1;\ -4;\ -9;\ -16;\ -25;\ \ldots$

(9) $(a_n) = \left(\frac{4n + 5}{3n - 1}\right) = \frac{9}{2};\ \frac{13}{5};\ \frac{17}{8};\ \frac{21}{11};\ \frac{25}{14};\ \ldots$

(10) $(a_n) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \ldots$

Als Beispiel soll bewiesen werden, daß die Zahlenfolge (4) streng monoton wächst:

Voraussetzung: $a_n = \frac{n^2 + n}{5n - 1};\quad a_{n+1} = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1)}{5(n + 1) - 1} = \frac{n^2 + 3n + 2}{5n + 4}$

Behauptung: $\forall n \in N \setminus \{0\}: a_n < a_{n+1}$

Beweis:

$$\frac{n^2 + n}{5n - 1} < \frac{n^2 + 3n + 2}{5n + 4} \qquad \forall n \in N \setminus \{0\}: 5n + 4 > 0 \wedge 5n - 1 > 0$$

(d. h., das Relationszeichen bleibt bei der Multiplikation mit den Nennern erhalten)

$$(n^2 + n)(5n + 4) < (n^2 + 3n + 2)(5n - 1)$$
$$5n^3 + 9n^2 + 4n < 5n^3 + 14n^2 + 7n - 2$$
$$0 < 5n^2 + 3n - 2$$

Diese Aussage ist für alle $n \geqq 1$ wahr. Jeder Schritt ist eindeutig umkehrbar. Also ist $a_n < a_{n+1}$, d. h., die Zahlenfolge (4) ist streng monoton wachsend.

w. z. b. w.

Die Zahlenfolge

(11) $(a_n) = \left(\frac{n^2 - 1}{2^n}\right) = 0;\ \frac{3}{4};\ 1;\ \frac{15}{16};\ \frac{3}{4};\ \ldots$

ist nicht monoton, weil sie bis zum dritten Glied wächst, dann aber fällt.

23.3.2. Konstante Zahlenfolgen

(12) $(a_n) = (3) = 3;\ 3;\ 3;\ 3;\ \ldots$

Die Zahlenfolge (12) ist ein Beispiel für eine konstante Zahlenfolge.

> ▶ **Def.:** Die Zahlenfolge f heißt konstante Zahlenfolge
> $\leftrightarrow \forall n \in D(f): a_n = a_{n+1} = c \in R$

23.3.3. Konvergente und divergente Zahlenfolgen

Die Konvergenz einer Zahlenfolge

Zahlenfolgen unterscheiden sich auch dadurch, daß sie einen Grenzwert haben oder keinen haben.

Beispielsweise hat die Zahlenfolge (1)

$$(a_n) = \left(\frac{n - 1}{n}\right) = 0;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \ldots$$

den Grenzwert 1, denn für immer größer werdende n nähern sich die Glieder der Folge immer mehr der Zahl 1. Man sagt: Fast alle Glieder der Folge liegen in einer beliebig kleinen Umgebung der Zahl 1.

Dabei bedeutet die Redewendung „fast alle“ in der Mathematik, daß unendlich viele Glieder in der Umgebung von 1 liegen und nur endlich viele Glieder außer-

halb der Umgebung von 1 liegen. Unter der „ε-Umgebung" der Zahl 1 versteht man das offene Intervall $(1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$, wobei ε eine beliebig kleine, positive reelle Zahl bedeutet.
Für $\varepsilon = 0{,}1$ ist die Umgebung von 1 das Intervall $(0{,}9; 1{,}1)$. Für $\varepsilon = 0{,}01$ ist die Umgebung von 1 das Intervall $(0{,}99; 1{,}01)$. Für $\varepsilon = 0{,}1$ liegt die Zahl 0,95 in der ε-Umgebung von 1, weil $0{,}9 < 0{,}95 < 1{,}1$ ist. Dagegen liegt 0,95 für $\varepsilon = 0{,}01$ nicht in der Umgebung von 1; denn $0{,}99 > 0{,}95$.
Betrachten wir noch einmal die graphische Darstellung der Folge $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$:

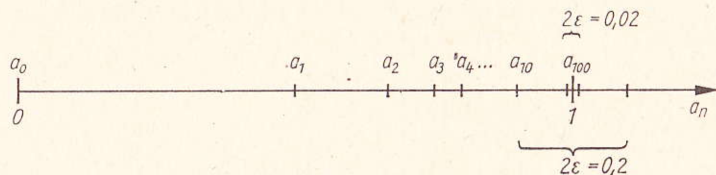


Abb. 23.3. Graph der Folge $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$ und „Umgebung" von 1

Man erkennt:

1. $a_{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9$. Das Glied a_{11} und alle folgenden Glieder liegen zwischen 0,9 und 1. Sie liegen also für $\varepsilon = 0{,}1$ in der ε-Umgebung von 1, im offenen Intervall $(0{,}9; 1{,}1)$. Für $\varepsilon = 0{,}1$ liegen 10 Glieder (endlich viele) nicht in der Umgebung von 1; unendlich viele Glieder liegen in der Umgebung von 1.
2. $a_{100} = \frac{99}{100} = 0{,}99$. Für $\varepsilon = 0{,}01$ liegen endlich viele Glieder, nämlich 100, außerhalb der Umgebung von 1. Das Glied a_{101} und alle folgenden – das sind unendlich viele – liegen in der Umgebung von 1.
3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man immer ein a_k angeben, so daß a_k und alle folgenden Glieder in der Umgebung von 1 liegen.

Die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ heißt wegen der genannten Eigenschaften eine konvergente Folge.
Wenn wir die Erkenntnisse, die wir an der Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ gewonnen haben, verallgemeinern, erhalten wir folgende Definitionen:

> ▶ **Def.:** Unter der ε-Umgebung einer Zahl $g \in R$ versteht man das offene Intervall $(g - \varepsilon; g + \varepsilon)$, wobei ε eine beliebig kleine, positive reelle Zahl bedeutet.

> ▶ **Def.:** Eine reelle Zahl g heißt der Grenzwert der Folge (a_n) genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ fast alle Glieder der Folge (a_n) in der ε-Umgebung von g liegen.

Man schreibt dafür:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

Man liest: Limes von a_n für n gegen unendlich gleich g.

Aus der Grenzwertdefinition folgt der Satz:

Eine Zahlenfolge hat **höchstens einen** Grenzwert.

> ▶ **Def.:** Eine Zahlenfolge (a_n) heißt konvergent genau dann, wenn sie einen Grenzwert $g \in R$ hat.
> (a_n) ist konvergent $\leftrightarrow \exists g \in R: \lim_{n\to\infty} a_n = g$.

Man sagt auch: Die Folge (a_n) konvergiert gegen (den Grenzwert) g.

Die Divergenz einer Zahlenfolge

(13) $(a_n) = ((-1)^n \cdot 7) = -7; +7; -7; +7; \ldots$

Die Zahlenfolge (13) ist divergent, denn es existiert kein eindeutig bestimmter Grenzwert.

> ▶ **Def.:** Eine Zahlenfolge heißt divergent genau dann, wenn sie keinen Grenzwert hat.

Die Zahlenfolge (3) ist divergent, weil sie keinen Grenzwert hat.

Anmerkung: Wenn die Glieder einer Zahlenfolge – wie beispielsweise bei den Zahlenfolgen (3) und (8) – gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$ streben, so sagt man auch, die Zahlenfolge hat einen uneigentlichen Grenzwert.

23.4. Berechnung der Grenzwerte von Zahlenfolgen

Die Grenzwerte einiger Typen von Zahlenfolgen kann man leicht bestimmen, weil man allgemein Aussagen über ihr Konvergenzverhalten machen kann.

23.4.1. Konstante Zahlenfolgen

Jede konstante Zahlenfolge $(a_n) = (c)$ mit $c \in R$ ist selbstverständlich eine konvergente Zahlenfolge mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} c = c$.

23.4.2. Arithmetische Zahlenfolgen

■ *Beispiel:*

$(3 + (n - 1) \cdot 4) = 3; 7; 11; 15; 19; \ldots$

▶ **Def.:** Eine Zahlenfolge (a_n) heißt arithmetische Zahlenfolge genau dann, wenn für alle n die Differenz $a_{n+1} - a_n$ den gleichen Wert $d \in R$ hat.

Anmerkung: Die Glieder a_n und a_{n+1} nennt man unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder.

■ *Satz:* Für das allgemeine Glied a_n einer arithmetischen Folge gilt die Gleichung: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$.

Nach dieser Definition sind die Zahlenfolgen (3) und (6) arithmetische Zahlenfolgen.
Man erkennt, daß arithmetische Zahlenfolgen für $d \neq 0$ stets divergent sind.

23.4.3. Geometrische Zahlenfolgen

■ *Beispiel:*

$$\left(27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = 27;\ -9;\ 3;\ -1;\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{9};\ \ldots$$

▶ **Def.:** Eine Zahlenfolge heißt geometrische Zahlenfolge genau dann, wenn für alle n der Quotient $a_{n+1} : a_n$ den gleichen Wert $q \neq 0$ hat.

Allgemeines Glied: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Man erkennt, daß die Zahlenfolge (10) nach dieser Definition eine geometrische Zahlenfolge ist.
Für die Zahlenfolge (10) gilt $0 < |q| < 1$. Alle geometrischen Zahlenfolgen, für die diese Relation erfüllt ist, haben den Grenzwert 0.
Geometrische Zahlenfolgen, für die $q = -1$ oder $|q| > 1$ gilt, sind divergent.

23.4.4. Nullfolgen

Außer konvergenten geometrischen Zahlenfolgen gibt es noch andere Zahlenfolgen, die gegen 0 konvergieren. Alle Zahlenfolgen, die gegen 0 konvergieren, heißen Nullfolgen. Mit ihrer Hilfe kann man die Grenzwerte vieler Zahlenfolgen berechnen und auch Zahlenfolgen mit bestimmten Eigenschaften und gegebenen Grenzwerten bilden.

▶ **Def.:** Eine Nullfolge ist eine Zahlenfolge, die gegen den Grenzwert $g = 0$ konvergiert.

Beispielsweise sind die Zahlenfolgen (2), (10) und (11) Nullfolgen. Auch alle Folgen der Form $\left(\frac{A}{n^k}\right)$ mit A, k konstant und $k > 0$ sind Nullfolgen.

Beispielsweise sind $\left(\frac{10^6}{n}\right)$; $\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $\left(\frac{-100}{\sqrt{n}}\right)$ Nullfolgen.

23.4.5. Konvergente Zahlenfolgen, deren Grenzwerte mit Hilfe von Grenzwertsätzen berechnet werden können

Die Grenzwertsätze

Aus zwei konvergenten Zahlenfolgen

$$(a_n) = a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots \quad \text{und} \quad (b_n) = b_1;\ b_2;\ b_3;\ \ldots$$

mit den Grenzwerten g_1 bzw. g_2 kann man mit Hilfe der vier Grundrechenarten neue Zahlenfolgen bilden:

$$\begin{aligned}
(a_n + b_n) &= a_1 + b_1;\quad a_2 + b_2;\quad a_3 + b_3;\ \ldots\\
(a_n - b_n) &= a_1 - b_1;\quad a_2 - b_2;\quad a_3 - b_3;\ \ldots\\
(a_n \cdot b_n) &= a_1 \cdot b_1;\quad a_2 \cdot b_2;\quad a_3 \cdot b_3;\ \ldots\\
(a_n : b_n) &= a_1 : b_1;\quad a_2 : b_2;\quad a_3 : b_3;\ \ldots
\end{aligned}$$

■ Man kann beweisen, daß diese vier Zahlenfolgen auch konvergieren und daß folgende Relationen gelten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = g_1 + g_2\\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = g_1 - g_2\\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = g_1 \cdot g_2\\
\lim_{n\to\infty} (a_n : b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n : \lim_{n\to\infty} b_n = g_1 : g_2
\end{aligned}$$

Für die letzte Relation muß man selbstverständlich voraussetzen, daß $g_2 \neq 0$ ist und auch kein b_i $(i = 1; 2; 3; \ldots)$ gleich null ist. Die erste Relation lautet als „Grenzwertsatz" formuliert:
„Der Grenzwert einer Summe von konvergenten Zahlenfolgen ist gleich der Summe aus den Grenzwerten der Zahlenfolgen." Entsprechend kann man die anderen Relationen formulieren.
Auch mit Hilfe des Potenzierens, des Radizierens und des Logarithmierens kann man aus einer konvergenten Zahlenfolge neue Zahlenfolgen bilden. Natürlich müssen dabei die Bedingungen, unter denen eine Wurzel bzw. ein Logarithmus definiert ist, erfüllt sein.

Beispiel:

Die Folge $\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{6}{5};\ \ldots$ konvergiert gegen den Grenzwert 1.
Auch die Folge $\left(\lg \frac{n+1}{n}\right) = \lg 2;\ \lg \frac{3}{2};\ \lg \frac{4}{3};\ \lg \frac{5}{4};\ \lg \frac{6}{5};\ \ldots$ konvergiert und hat den Grenzwert $\lg 1 = 0$.

Den Inhalt der Grenzwertsätze kann man vereinfacht in folgender Aussage zusammenfassen: Die Reihenfolge bei der Ausführung einer Rechenoperation und der Grenzwertbildung ist vertauschbar.

Berechnung der Grenzwerte konvergenter Zahlenfolgen mit Hilfe der Grenzwertsätze

Wenn man den Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge mit Hilfe der Grenzwertsätze berechnen will, muß man zuerst das allgemeine Glied der Folge um-

formen. Das Ziel dieser Umformung ist es, konstante Zahlenfolgen und Nullfolgen zu bekommen.
Dazu kann man im Zähler und Nenner jeweils die höchste Potenz von n ausklammern und den Bruch kürzen.

Beispiele:

(1) $(a_n) = \left(\frac{n^2 - 1}{3n^2 + n}\right)$

Umformung: $\frac{n^2 - 1}{3n^2 + n} = \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}}$

Durch Anwendung der Grenzwertsätze erhält man daraus:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^2 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1 - 0}{3 + 0} = \frac{1}{3}$$

Kurzform: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$

Die Grenzwertbestimmung erfolgt in zwei Schritten:

Umformen des allgemeinen Gliedes. Man klammert die höchste Potenz von n im Zähler und Nenner aus und kürzt.
Grenzwertberechnung mit Hilfe der Grenzwertsätze.

(2) $(a_n) = \left(\frac{n + 1}{2n^2 - 1}\right)$

Umformung: $\frac{n + 1}{2n^2 - 1} = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n^2}}$

Grenzwertberechnung: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n^2}}\right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$

(3) $(a_n) = \left(\frac{3n^3 - n + 2}{2n + 1}\right)$

Umformung: $\frac{3n^3 - n + 2}{2n + 1} = \frac{n^3\left(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)}{n\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = n^2 \cdot \frac{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{2 + \frac{1}{n}}$

Die Folge (n^2) ist nicht konvergent. Man muß mit den uneigentlichen Grenzwerten $+\infty$ bzw. $-\infty$ arbeiten.

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \cdot \frac{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{2 + \frac{1}{n}}\right) = \infty$$

23.4.6. Die Zahlenfolge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$

Es gibt viele konvergente Zahlenfolgen, deren Grenzwerte man nicht allein mit Hilfe der Grenzwertsätze berechnen kann. Ein Beispiel dafür ist die Zahlenfolge $(a_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.
Man hat bewiesen, daß der Grenzwert dieser Zahlenfolge die irrationale Zahl $e = 2{,}718281828459\ldots$ ist. Die Zahl e hat große Bedeutung z. B. als Basis der natürlichen Logarithmen.

■ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie ist eine unendliche Zahlenfolge definiert?
2. In welcher Form kann man eine Zahlenfolge schreiben?
3. Warum bezeichnet man bei einer Zahlenfolge die unabhängige Variable im allgemeinen mit n?
4. Warum ist $f = \{(1; 1); (1{,}5; 2); (2; 3); \ldots\}$ keine Zahlenfolge?
5. Wie lautet die abgekürzte Darstellung einer Zahlenfolge?
6. Welche Eigenschaft hat der Graph einer unendlichen Zahlenfolge?
7. Welcher Unterschied besteht zwischen $(a_n) = \left(\frac{1}{n + 1}\right)$ und $a_n = \frac{1}{n + 1}$?
8. Unter welcher Bedingung ist eine Zahlenfolge streng monoton wachsend?
9. Wie ist eine konstante Zahlenfolge definiert?
10. Was bedeutet: „fast alle" Glieder der Zahlenfolge (a_n) liegen in der ε-Umgebung der Zahl 3?

11. Was versteht man unter der ε-Umgebung der Zahl 3?
12. Wie ist der Grenzwert g einer Zahlenfolge (a_n) definiert?
13. Unter welcher Bedingung ist eine Zahlenfolge konvergent?
14. Unter welcher Bedingung ist eine Zahlenfolge divergent?
15. Unter welcher Bedingung hat eine Zahlenfolge einen uneigentlichen Grenzwert?
16. Ist eine konstante Zahlenfolge immer konvergent?
17. Wie lautet die Definition einer arithmetischen Zahlenfolge?
18. Was wissen Sie über Divergenz bzw. Konvergenz einer arithmetischen Zahlenfolge?
19. Wie ist eine geometrische Zahlenfolge definiert?
20. Unter welcher Bedingung ist eine geometrische Zahlenfolge $(a_1 \cdot q^n)$ konvergent?
21. Wie ist eine Nullfolge definiert?
22. Geben Sie vier Beispiele für Nullfolgen an!
23. Sprechen Sie über Grenzwertsätze!
24. Wie kann man den Inhalt der Grenzwertsätze vereinfacht zusammenfassen?
25. In welchen Schritten erfolgt die Grenzwertbestimmung einer Zahlenfolge?
26. Was ist der Grenzwert der Zahlenfolge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$?

Aufgaben

1. Bilden Sie das Partizip I, und verwenden Sie es als Attribut!
konvergieren/
.... Zahlenfolgen haben einen Grenzwert.
► konvergieren/konvergierend
Konvergierende Zahlenfolgen haben einen Grenzwert.

(n) ist eine .... Folge.
$(-n)$ ist eine .... Folge.
.... Zahlenfolgen haben keinen eindeutigen, endlichen Grenzwert.
$\left(\frac{1}{n}\right)$ ist eine .... Folge.
(n^2) ist eine .... Folge!

monoton fallen/
monoton wachsen/
divergieren/
konvergieren/

2. Substantive auf „-enz" und Adjektive auf „-ent"
Bilden Sie das Adjektiv, und formulieren Sie zwei Sätze!
die Äquivalenz/........
► die Äquivalenz/äquivalent
Für die Äquivalenz „A genau dann, wenn B" schreibt man $A \leftrightarrow B$.
Die Aussagen A und B sind äquivalent.

die Konvergenz/........
die Divergenz/........
die Kongruenz/........

3. Lesen Sie!

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$; $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = h$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$

4. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Zahlenfolgen!

1. $\left(\frac{3n+5}{4n+3}\right)$
2. $\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)$
3. $\left(\frac{5n^2+4n+1}{n^2+3n+2}\right)$
4. $\left(\frac{2n+1}{n^2+1}\right)$
5. $((-n)^{-1})$
6. $\left(\frac{n}{n+3}\right)$
7. $\left(\frac{n^3+1}{2n^3+n^2}\right)$
8. (n^{-1})
9. $\left(\frac{n^2+1}{2n+1}\right)$

5. konvergieren gegen

$\left(\frac{1}{n}\right)$

► Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergiert gegen den Grenzwert 0.

Benutzen Sie die Zahlenfolgen aus 4.!

6. Beweisen Sie, daß die Folgen den angegebenen Grenzwert haben!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

► *Voraussetzung:* $\forall \varepsilon: \varepsilon > 0$; $a_n = \frac{n+1}{n}$

Behauptung: $\exists n_0(\varepsilon) \in N: \forall n > n_0: 1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n} < 1 + \varepsilon$

Beweis: Da alle Glieder der Folge $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ größer als 1 sind, genügt die Untersuchung der rechten Seite der Ungleichung in der Behauptung.

$$\frac{n_0+1}{n_0} < 1 + \varepsilon$$

Wir berechnen aus dieser Ungleichung n_0.

$$n_0 + 1 < n_0 + n_0\varepsilon$$
$$1 < n_0\varepsilon$$
$$\frac{1}{\varepsilon} < n_0$$
$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Jeder Schritt der Umformung ist eindeutig umkehrbar. Also folgt aus $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, daß $\frac{n_0 + 1}{n_0} < 1 + \varepsilon$ ist.

Für $n > n_0$ gilt deshalb erst recht $\frac{n+1}{n} < 1 + \varepsilon$.

Fast alle $a_n = \frac{n+1}{n}$ liegen in der ε-Umgebung von 1. w. z. b. w.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100}{n^2} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100}{(+2)^n} = 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+3} = 1$

24. Allgemeines über Funktionen

Bei der Untersuchung von Funktionen sind folgende Begriffe besonders wichtig:

Definitionsbereich und Wertebereich von Funktionen
Nullstellen von Funktionen
Monotonie bei Funktionen
Stetigkeit bzw. Unstetigkeitsstellen bei Funktionen
Verhalten von Funktionen im Unendlichen
gerade bzw. ungerade Funktionen und Symmetrieeigenschaften
der Graph der Funktionen

Zuerst werden wir die Begriffe erläutern.

24.1. Definitions- und Wertebereich von Funktionen

Eine Funktion f ist vollständig bekannt, wenn man ihren Definitionsbereich kennt und den Funktionswert $f(x)$ für jedes $x \in D(f)$ bestimmen kann, denn es gilt $f = \{(x; y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$. Die Menge der Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in D(f)$ bestimmt den Wertebereich der Funktion f.

Beispiele:

(1) Von der Funktion f sei die Funktionsgleichung $y = f(x) = x - 3$ gegeben. Der größtmögliche Definitions- und Wertebereich sollen bestimmt werden. Da zu jedem $x \in R$ ein Funktionswert $f(x) \in R$ existiert und umgekehrt, folgt $D(f) = (-\infty; +\infty)$ und $W(f) = (-\infty; +\infty)$. (Man liest: „Der Definitionsbereich von f ist das offene Intervall von minus unendlich bis plus unendlich.“)
Einige Funktionswerte sind z. B.:
$f(0) = -3$; $f(1) = -2$; $f(-1) = -4$ usw.

(2) $y = f(x) = \sqrt{2x - 4}$ sei die Funktionsgleichung einer Funktion f.
Der Definitionsbereich ergibt sich aus der Bedingung für den Radikanden, nicht negativ zu sein. Aus $2x - 4 \geqq 0$ folgt $x \geqq 2$ und damit $D(f) = [2; +\infty)$.
(Man liest: „... ist das links abgeschlossene und rechts offene Intervall von zwei bis plus unendlich.“)
Für den Wertebereich findet man durch Einsetzen $W(f) = [0; +\infty)$.
Funktionswerte sind z. B. $f(2) = 0$ und $f(52) = 10$.

(3) Für die Funktion f mit $y = f(x) = \lg x$ ergibt sich der Definitionsbereich aus der Definition des Logarithmus. Man erhält $D(f) = (0; +\infty)$. Ebenso folgt für den Wertebereich $W(f) = (-\infty; +\infty)$. Funktionswerte sind z. B. $f(10) = 1$ und $f(0,1) = -1$.

24.2. Nullstellen von Funktionen

> ► **Def.:** $x_0 \in D(f)$ heißt Nullstelle der Funktion f genau dann, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

Jede Nullstelle x_0 einer Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ findet man, indem man die Gleichung $f(x_0) = 0$ löst.

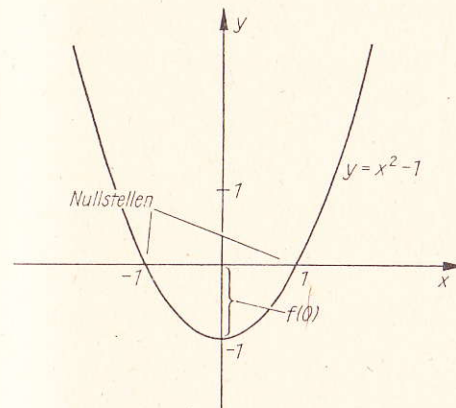


Abb. 24.1. Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 1$

Beispiel:

Die Nullstellen der Funktion f mit $y = f(x) = x^2 - 1$ findet man, indem man die Gleichung $x_0^2 - 1 = 0$ löst. $x_{01} = 1$; $x_{02} = -1$ sind die (einfachen) Nullstellen der Funktion f.
Die einfachen Nullstellen einer Funktion geben die Abszissen der Punkte an, in denen der Graph der Funktion die x-Achse schneidet.

Bei einer doppelten Nullstelle berührt der Graph die x-Achse,
z. B. f: $y = (x - 1)^2$ hat an der Stelle $x_0 = 1$ eine doppelte Nullstelle.

24.3. Monotonie bei Funktionen

> ▶ **Def.:** Eine Funktion f heißt in $I \subseteq D(f)$ streng monoton wachsend genau dann, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ gilt:
> $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
> Eine Funktion f heißt in $I \subseteq D(f)$ streng monoton fallend genau dann, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ gilt:
> $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Beispiel:

Die Funktion f mit $y = f(x) = x^2 - 1$ ist im Intervall $[0; +\infty) \subseteq D(f)$ streng monoton wachsend. Die Wahrheit dieser Aussage soll bewiesen werden.

Voraussetzung: $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$ und $x_1 < x_2, y = f(x) = x^2 - 1$

Behauptung: $f(x_1) < f(x_2)$

Beweis: Aus $x_1 < x_2$ und $x_1 \geqq 0$ folgt $x_1^2 < x_2^2$ und $x_1^2 - 1 < x_2^2 - 1$, also $f(x_1) < f(x_2)$. w. z. b. w.

Im Intervall $(-\infty; 0] \subseteq D(f)$ ist die Funktion f streng monoton fallend.

24.4. Stetigkeit von Funktionen

Für die Definition der Stetigkeit von Funktionen braucht man den Begriff des Grenzwertes einer Funktion. Der Grenzwert einer Funktion f wird durch folgenden Satz, den wir ohne Beweis angeben, auf den Grenzwert von Zahlenfolgen zurückgeführt.

Satz: Die Funktion f hat in x_0 genau dann den Grenzwert g, wenn für alle Zahlenfolgen (x_n) mit $x_n \neq x_0, x_n \in D(f)$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$.

Unter den oben gemachten Voraussetzungen schreibt man dafür auch $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$.

> ▶ **Def.:** Eine Funktion f, deren Definitionsbereich $D(f)$ eine Umgebung der Stelle $x = x_0$ enthält, ist an der Stelle x_0 genau dann stetig, wenn
> 1. die Funktion f an der Stelle x_0 definiert ist, d. h., wenn das geordnete Paar $(x_0; f(x_0))$ ein Element der Menge f ist,
> 2. der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und gleich einer Konstanten g ist,
> 3. $g = f(x_0)$ ist.

Als 2. Bedingung kann man statt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ auch $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = g$ schreiben.

Wenn eine Bedingung dieser Definition nicht erfüllt ist, so heißt die Funktion f an der Stelle x_0 unstetig.
Wenn eine Funktion in jedem Punkt eines Intervalls I stetig ist, so heißt sie stetig im Intervall I.
Wenn eine Funktion f in einem Intervall I stetig ist, so ist der Graph der Funktion f in I zusammenhängend.
Von besonderer Wichtigkeit für die Untersuchung von Funktionen sind die Unstetigkeitsstellen, die für jede Funktion speziell bestimmt werden müssen.

Aus der Definition der Stetigkeit folgt:
Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 nicht definiert ist, aber in der Umgebung von x_0 definiert ist, ist x_0 eine Unstetigkeitsstelle der Funktion f.

Beispiele für Funktionen mit Unstetigkeitsstellen:

(1) Die Funktion f mit $y = f(x) = \frac{1}{x}$ ist in $x_0 = 0$ unstetig, da sie an dieser Stelle nicht definiert ist, aber in der Umgebung von $x_0 = 0$.

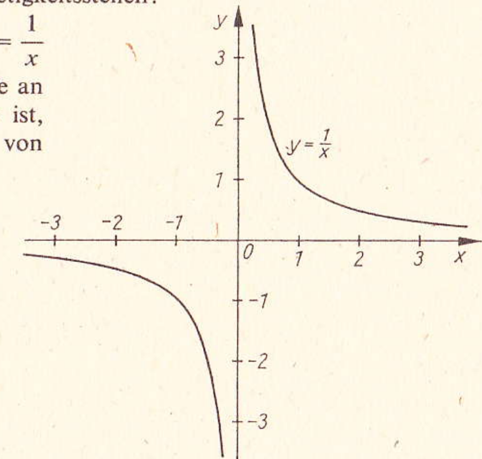


Abb. 24.2.

(2) Gegeben sei die Funktion f mit $y = f(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x \leqq 3 \\ -1 & \text{für } x > 3. \end{cases}$

Diese Funktion ist an der Stelle $x_0 = 3$ unstetig. Bedingung 1 der Definition ist erfüllt, denn es ist $f(x_0) = f(3) = +1$. Aber $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim\limits_{h \to 0} f(3 + h)$ ist nicht gleich $+1$, denn aus $3 + h > 3$ folgt $\lim\limits_{h \to 0} f(3 + h) = -1$.

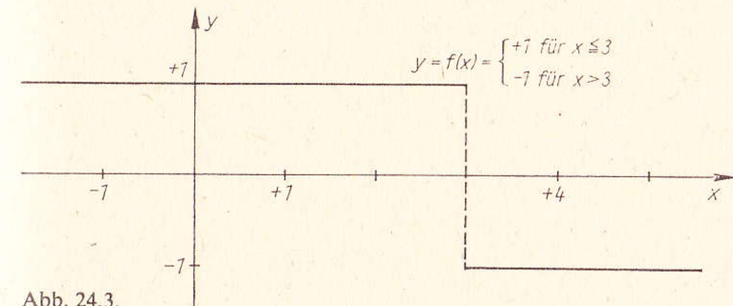


Abb. 24.3.

(3) Auch die Funktion f mit $y = f(x) = \begin{cases} +1 \text{ für } x \neq 3 \\ -1 \text{ für } x = 3 \end{cases}$ ist an der Stelle $x_0 = 3$ unstetig. Sie ist an der Stelle $x_0 = 3$ definiert, $f(3) = -1$, aber für beide Grenzwerte gilt: $\lim\limits_{h \to 0} f(3 + h) = \lim\limits_{h \to 0} f(3 - h) = +1$.

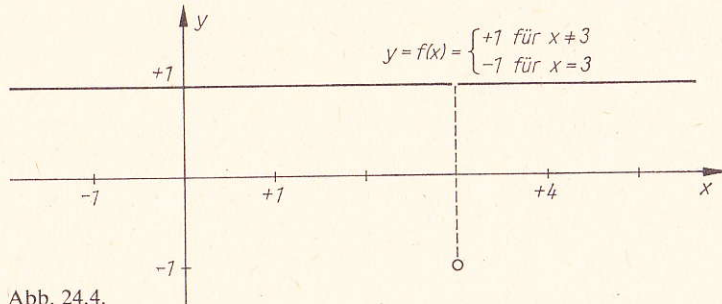


Abb. 24.4.

24.5. Verhalten von Funktionen im Unendlichen

Man untersucht das Verhalten einer gegebenen Funktion f für $x \to \pm\infty$. Das bedeutet, man bestimmt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Beispiel:

Wie verhalten sich die Funktionswerte der Funktion f mit $y = f(x) = 2^x$, wenn die unabhängige Variable $x \to \pm\infty$ geht? Für $x \to +\infty$ streben die Funktionswerte $f(x) = 2^x$ gegen plus unendlich und für $x \to -\infty$ streben die Funktionswerte gegen null. Man erhält deshalb $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$.

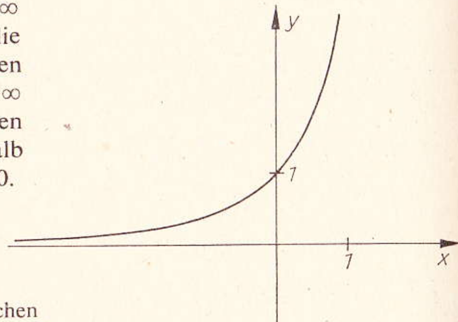


Abb. 24.5. Verhalten im Unendlichen

24.6. Gerade bzw. ungerade Funktionen

▶ **Def.:** Eine Funktion f heißt gerade bzw. ungerade, wenn für alle $x \in D(f)$ gilt: $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$.

Der Graph der Funktion f im kartesischen Koordinatensystem ist achsensymmetrisch (axialsymmetrisch) zur y-Achse bei einer geraden Funktion und zentralsymmetrisch zum Ursprung bei einer ungeraden Funktion.

Beispiele:

(1) Die Funktion f mit $y = f(x) = x^2 - 1$ ist eine gerade Funktion; denn es gilt:

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x).$$

Der Graph der Funktion f liegt axialsymmetrisch zur y-Achse.

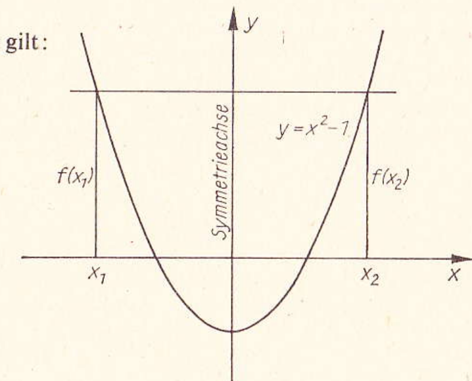


Abb. 24.6. Gerade Funktion

(2) Die Funktion f mit $y = f(x) = \frac{1}{x}$ ist ungerade; denn es gilt

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Der Graph der Funktion f ist zentralsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

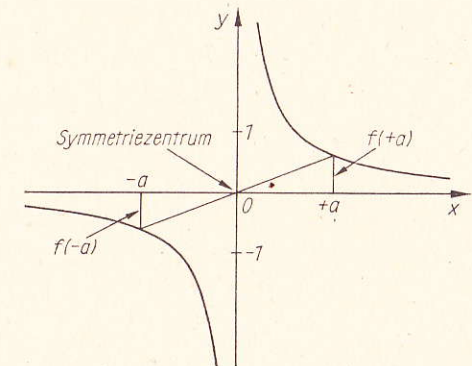


Abb. 24.7. Ungerade Funktion

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Eine Funktion ist durch $f = \{(x; f(x)) \mid x \in D(f)\}$ gegeben. Was bedeuten in dieser Darstellung $D(f)$ und $f(x)$?
2. Erklären Sie den Begriff Wertebereich einer Funktion f mit $y = f(x) \wedge x \in D(f)$!
3. Wie ist der Begriff Nullstelle einer Funktion definiert?
4. Wie bestimmt man die Nullstellen einer Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$?

5. Wie findet man mit Hilfe des Graphs $C(f)$ der Funktion f die Nullstellen der Funktion?
6. Gegeben ist die Funktion $f = \{(x; f(x)) \wedge x \in D(f)\}$.
   $\forall x_1, x_2 \in I \subseteq D(f): (x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
   Was ist über die Monotonie der Funktion f im Intervall I zu sagen?
7. Wie lautet die Definition der Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle x_0?
8. Welche andere Bezeichnung ist für $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ auch möglich?
9. Wie nennt man Funktionen, die nicht stetig sind?
10. Was bedeutet, daß eine Funktion f im Intervall I stetig ist?
11. Unter welcher Bedingung nennt man eine Stelle x_0 eine Unstetigkeitsstelle der Funktion f mit $y = f(x)$?
12. Wie untersucht man das Verhalten einer Funktion im Unendlichen?
13. Welche analytische Beziehung gilt für eine gerade bzw. ungerade Funktion f mit $y = f(x)$?
14. Welche Symmetrieeigenschaften hat der Graph einer Funktion f, wenn f eine gerade Funktion bzw. ungerade Funktion ist?

Aufgaben

1. Lesen Sie!

$f(0)$

► f an der Stelle 0.

$f(1)$; $f(3)$; $f(-2)$; $f(x_1)$; $f(x_n)$;
$f(x_1) < f(x_2)$; $f(x_k) \leqq f(x_{k+1})$; $g(x_i)$; $h(x_m)$.

2. Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^2 + x - 6$. Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen:

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = -1$; $x_6 = -2$; $x_7 = -3$!

3. Gegeben sind folgende reelle Funktionen:

$f_1: y = x - 7$; $\quad f_4: y = 1 - x^2$; $\quad f_7: y = x$;

$f_2: y = \sqrt{x - 4}$; $\quad f_5: y = \frac{1}{x}$; $\quad f_8: y = \sqrt{\frac{1}{x}}$;

$f_3: y = \sqrt{-x}$; $\quad f_6: y = \sqrt{6 - x}$; $\quad f_9: y = \frac{1}{x - 2}$!

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der gegebenen Funktionen!

4. Berechnen Sie die Funktionswerte der Funktionen aus Übung 3. an den Stellen:

$f_1: x_1 = 7$;	$x_2 = 14$;	$x_3 = 6$	$f_6: x_1 = 4$;	$x_2 = 9$;	$x_3 = \frac{1}{9}$;
$f_2: x_1 = 4$;	$x_2 = 0$;	$x_3 = -4$	$f_7: x_1 = -1$;	$x_2 = -25$;	$x_3 = \frac{1}{16}$;
$f_3: x_1 = 0$;	$x_2 = -16$;	$x_3 = 100$	$f_8: x_1 = 5$;	$x_2 = -3$;	$x_3 = -30$;
$f_4: x_1 = 4$;	$x_2 = 20$;	$x_3 = 148$	$f_9: x_1 = 3$;	$x_2 = 1$;	$x_3 = 12$;
$f_5: x_1 = -2$;	$x_2 = 1$;	$x_3 = 100$			

5. Welche Gleichung muß man lösen, wenn man die Nullstellen der Funktionen mit den folgenden Funktionsgleichungen bestimmen will?

$f: y = f(x) = x^2 - 1$

► Man muß die Gleichung $x_0^2 - 1 = 0$ lösen.
$x_{01} = -1$ und $x_{02} = 1$ sind die Nullstellen der Funktion f.

$f_1: y = f_1(x) = x - 3$ $\quad f_4: y = f_4(x) = x^2 - 9$
$f_2: y = f_2(x) = 2x + 6$ $\quad f_5: y = f_5(x) = x^2 - 0{,}25$
$f_3: y = f_3(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ $\quad f_6: y = f_6(x) = x^2 - x - 6$

6. Nennen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktionen f aus Aufgabe 5. mit der x-Achse!

$f: y = f(x) = x^2 - 1$

► Die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse sind $(-1; 0)$ und $(1; 0)$.

7. Beweisen Sie, daß

1. die Funktion f_1 mit $y = x + 1$ im Intervall $(-\infty; +\infty)$ streng monoton wächst,
2. die Funktion f_2 mit $y = \frac{1}{x}$ im Intervall $(0; +\infty)$ streng monoton fällt,
3. die Funktion f_3 mit $y = \frac{1}{1 - 2x}$ im Intervall $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ streng monoton wächst!

(Die Übung dient auch dem Rechnen mit Ungleichungen.)

8. Lesen Sie!

$x \to \pm\infty$

► „x gegen plus oder minus unendlich"

$x \to 0$; $x \to x_0$; $x \to x_1$; $x \to x_0 + h$; $x \to x_0 - h$;
$x \to +\infty$; $x \to -\infty$.

9. Stellen Sie fest, ob die durch den Graph $C(f)$ dargestellte Funktion an den angegebenen Stellen stetig oder unstetig ist!

$x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = +1$

► Die Funktion f ist an den Stellen x_1 und x_3 stetig, aber an der Stelle $x_2 = 0$ unstetig.

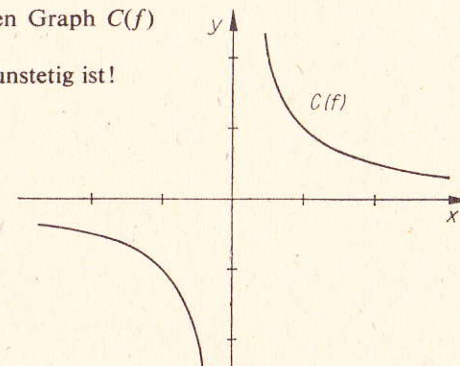
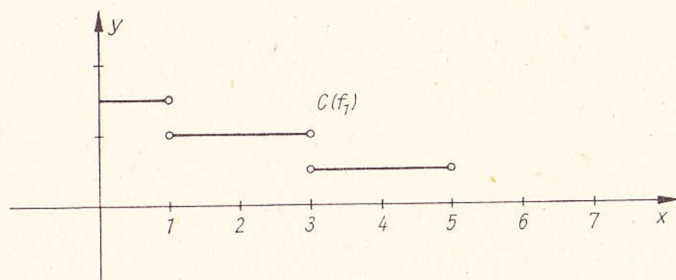
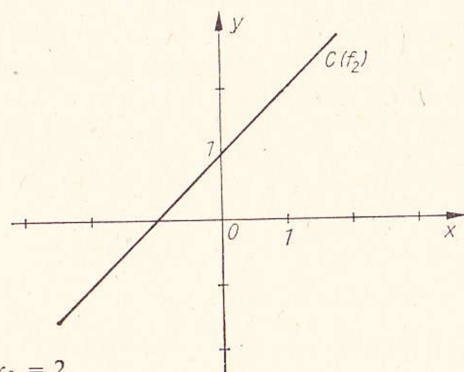


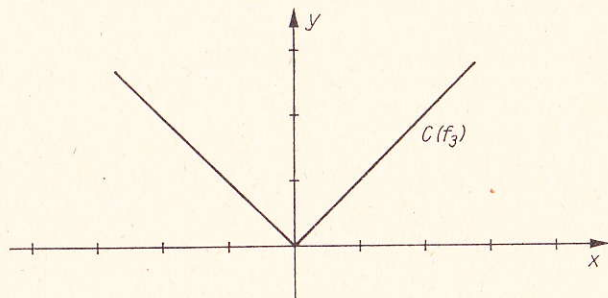
Abb. 24.8.



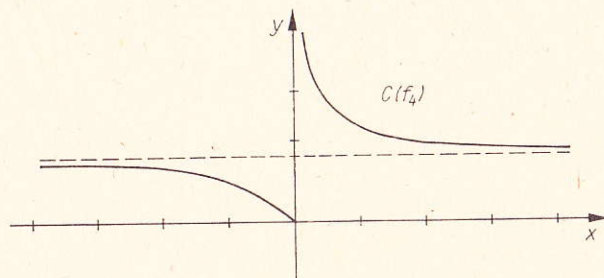
1. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$



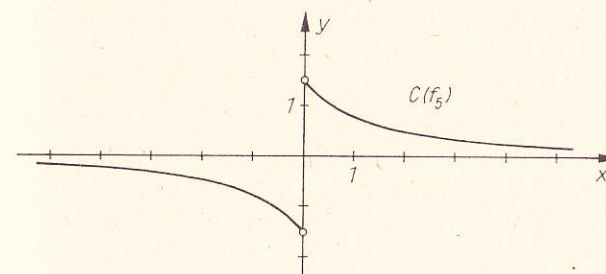
2. $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$



3. $x_1 = 0$



4. $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$



5. $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = +2$

Abb. 24.9.

10. Warum sind die Funktionen (Aufgabe 9.) f_1 an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_3 = 3$, f_2 an der Stelle $x_2 = 1$, f_4 an der Stelle $x_2 = 0$ und f_5 an der Stelle $x_2 = 0$ unstetig?

► Die Funktion f_2 ist an der Stelle $x_2 = 1$ nicht definiert, aber in der Umgebung von $x_2 = 1$. Deshalb ist $x_2 = 1$ eine Unstetigkeitsstelle.

11. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen gerade sind, ungerade sind oder keine dieser Eigenschaften haben!
Ist der Graph dieser Funktion axialsymmetrisch zur y-Achse oder zentralsymmetrisch zum Ursprung?

► f: $y = f(x) = 3x^2 - 2x$

Ist f eine gerade Funktion?

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x)$$
$$= 3x^2 + 2x \qquad \neq f(x)$$

f ist keine gerade Funktion.
Ist f eine ungerade Funktion?

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x)$$
$$= 3x^2 + 2x$$
$$= -(-3x^2 - 2x) \qquad \neq -f(x)$$

f ist keine ungerade Funktion.

Der Graph von f ist weder axialsymmetrisch zur y-Achse noch zentralsymmetrisch zum Ursprung.

f_1: $y = x^2$ | f_5: $y = 2x$ | f_8: $y = x + 3$

f_2: $y = x^3$ | f_6: $y = 5 - 2x$ | f_9: $y = \frac{1}{x^2}$

f_3: $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ | f_7: $y = x^2 - x$ | f_{10}: $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

f_4: $y = x - \frac{4}{x}$

25. Allgemeines über ganzrationale Funktionen

Wichtige Funktionen sind die ganzrationalen Funktionen. Sie finden eine vielseitige Anwendung in den Naturwissenschaften und in der Technik, z. B. bei der linearen Ausdehnung fester Körper.

Zu den ganzrationalen Funktionen gehören z. B. die linearen Funktionen mit der Gleichung $y = f(x) = mx + b$ und die quadratischen Funktionen mit der Gleichung

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

► **Def.:** Eine Funktion f ist ganzrational genau dann, wenn es eine natürliche Zahl n und reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$ gibt, so daß für alle $x \in R$ gilt:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = p_n(x).$$

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ nennt man die Koeffizienten. Die natürliche Zahl n heißt Grad der ganzrationalen Funktion, so ist z. B. die Funktion f mit $y = f(x) = x^4 + 2x^2 - 4$ eine ganzrationale Funktion 4-ten Grades. Dagegen sind die Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y = f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ und $y = f(x) = 2x + \sqrt{x}$ keine ganzrationalen Funktionen.

Der Term $p_n(x)$ heißt ein Polynom n-ten Grades in einer Variablen x. Bei einer ganzrationalen Funktion wird also nicht durch die unabhängige Variable dividiert, und die unabhängige Variable tritt nur mit natürlichen Exponenten auf.
Über den Definitionsbereich und die Stetigkeit bei ganzrationalen Funktionen können allgemeine Aussagen gemacht werden, die für alle ganzrationalen Funktionen Gültigkeit haben.
Aus der Definition erkennt man, daß es in dem Term $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ nur Potenzen der Variablen x gibt, bei denen der Exponent eine natürliche Zahl ist. Aber Potenzen mit natürlichen Exponenten sind für alle reellen Basen definiert, deshalb ist auch dieser Term für alle reellen x definiert. Eine ganzrationale Funktion f erfüllt für jede Stelle $x = x_k \in D(f) = R$ die Bedingungen für die Stetigkeit einer Funktion.

■ Eine ganzrationale Funktion f mit $y = f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ ist im Intervall $(-\infty; +\infty)$ stetig.

Besondere Untersuchungen sind notwendig, wenn man die Nullstellen, die Monotonie, das Verhalten im Unendlichen und die Symmetrieeigenschaften einer ganzrationalen Funktion bestimmen will.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welche Rechenoperationen werden mit der unabhängigen Variablen x zur Bildung des Terms $f(x)$ einer ganzrationalen Funktion ausgeführt?
2. Wie nennt man die reellen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in dem Term $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$?
3. Welchen Grad hat die ganzrationale Funktion f mit der der Gleichung $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$?
4. Was versteht man unter einem Polynom n-ten Grades?
5. Welchen Definitionsbereich haben die ganzrationalen Funktionen?
6. In welchem Intervall sind die ganzrationalen Funktionen stetig?

Aufgaben

1. Welchen Grad haben die ganzrationalen Funktionen?

   f: $y = 0{,}4x^3 - x$
   ► Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades.

   f_1: $y = x^2 - x + 1$
   f_2: $y = 4x + 7$
   f_3: $y = 2 - 0{,}3x$
   f_4: $y = 2 + 3x - 4x^2$
   f_5: $y = 2x^4 - 3x^3 - 4x$
   f_6: $y = \frac{1}{2}x^3 - 4{,}5x$
   f_7: $y = \frac{3}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{7}x$
   f_8: $y = 1{,}5 - 0{,}3x + 45x^2 - 1{,}2x^3$

2. Begründen Sie, warum der Definitionsbereich für alle ganzrationalen Funktionen die Menge R ist?

26. Lineare Funktionen

$$f = \{(x; y) \mid y = f(x) = mx + b;\ m, b \in R\}$$

Zur Menge der ganzrationalen Funktionen gehören die linearen Funktionen.

Die lineare Funktion hat genau eine Nullstelle, wenn $m \neq 0$ ist.

Aus $f(x_0) = mx_0 + b = 0$ folgt die Nullstelle $x_0 = -\frac{b}{m}$ mit $m \neq 0$.
Die lineare Funktion ist
streng monoton wachsend für $m > 0$ und
streng monoton fallend für $m < 0$.
(m nennt man den Anstieg des Graphen der linearen Funktion.)

Für $m < 0$ soll die Aussage bewiesen werden.

Voraussetzung: $m < 0, \quad y = f(x) = mx + b;$

Behauptung: $\forall x_1, x_2 \in D(f) \wedge x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$

Beweis: $f(x_1) > f(x_2)$

$$mx_1 + b > mx_2 + b \quad | -b$$
$$mx_1 > mx_2 \quad | :m \quad (m \neq 0 \text{ und negativ})$$
$$x_1 < x_2$$

Da jeder Schritt eindeutig umkehrbar ist, folgt aus der letzten Aussage die Behauptung. w. z. b. w.

Das Verhalten der linearen Funktion im Unendlichen:

Für $m > 0$ gilt:

$$\lim_{x \to +\infty} (mx + b) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} (mx + b) = -\infty,$$

und für $m < 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} (mx + b) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} (mx + b) = +\infty.$$

Der Graph der linearen Funktion ist eine Gerade.

Wenn der Anstieg positiv ist ($m > 0$), so steigt die Gerade. Bei negativem Anstieg ($m < 0$) fällt die Gerade.

Der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse des Koordinatensystems ist der Punkt $P_s(0; b)$.

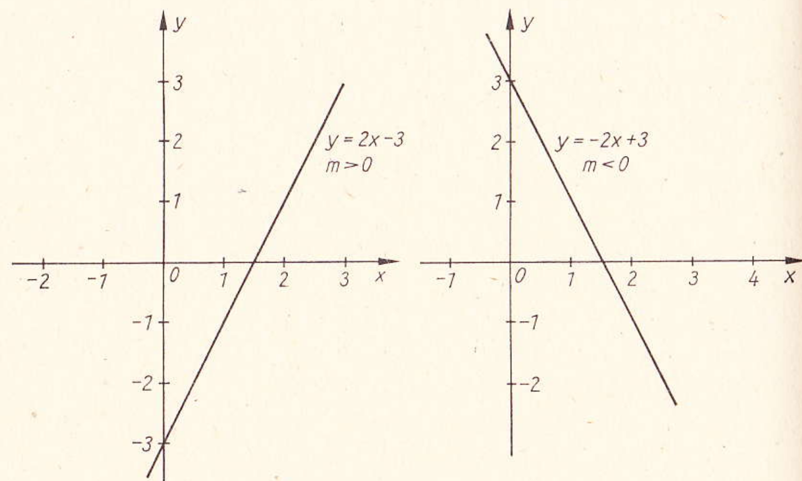


Abb. 26.1. Graph der linearen Funktion

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = c$ (c eine reelle Konstante) nennt man „konstante Funktion". Der Graph einer konstanten Funktion ist eine Parallele zur x-Achse, der Anstieg ist dabei 0.

Dagegen gibt die Gleichung $x = c$ keine Funktion in x an, denn dem Wert $x = c$ können alle Werte $y \in R$ zugeordnet werden (keine eindeutige Abbildung).

Der Graph von $x = c$ ist die Gerade parallel zur y-Achse im Abstand c.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wieviel Nullstellen hat eine lineare Funktion?
2. Unter welcher Bedingung für m steigt bzw. fällt eine Gerade, wenn $y = mx + b$ die Gleichung ist?
3. Wie nennt man die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = c$ mit $c \in R$, konstant?
4. Was kann man über den Graph der konstanten Funktion sagen?
5. Welche Gleichung hat eine Gerade parallel zur y-Achse im Abstand $+3$?

Aufgaben

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden linearen Funktionen streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend sind!

   $f: y = -2x$

   ► Die lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $y = -2x$ ist streng monoton fallend, weil der Anstieg m negativ ist.

   $f_1: y = 3x + 1$ $\qquad$ $f_4: y = \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x$

   $f_2: y = 2 + 0{,}5x$ $\qquad$ $f_5: y = -2x + 5$

   $f_3: y = \frac{1}{2}x - 4$ $\qquad$ $f_6: y = \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$

2. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender linearer Funktionen!

   $f_1: y = x - 1$ $\qquad$ $f_4: y = 2x - 8$

   $f_2: y = 0{,}25x$ $\qquad$ $f_5: y = -x - 2$

   $f_3: 4y + 3x = 24$ $\qquad$ $f_6: 15x + 10y - 8 = 0$

3. Zeichnen Sie die Graphen der linearen Funktionen f_3, f_4, f_5 und f_6 aus Übung 2. in ein kartesisches Koordinatensystem!

4. Gegeben ist die lineare Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = mx + b$.

   4.1. Welche Bedeutung hat der Koeffizient von x für den Graph dieser Funktion?
   Unterscheiden Sie die Fälle $m > 0$ und $m < 0$!

   4.2. Welche Bedeutung hat die Konstante b für den Graph der Funktion?

5. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der folgenden Geraden!

   1. $y = x - 1$ und $y = x + 3$; $\qquad$ 3. $x + 2y + 8 = 0$ und $y = \frac{3}{2}x$;

   2. $y = 3x - 3$ und $y = 2x + 2$; $\qquad$ 4. $5x + 2y + 15 = 0$ und $2x + 5y = 15$

6. Gegeben sind zwei Funktionen

$f_1: y = m_1 x + b_1$ und $f_2: y = m_2 x + b_2$.

6.1. Unter welcher Voraussetzung für m_1 und m_2 haben die Graphen dieser Funktionen keinen gemeinsamen Schnittpunkt?

6.2. Unter welcher Bedingung für b_1 und b_2 gehen die Graphen dieser beiden Funktionen durch den Koordinatenursprung?

27. Quadratische Funktionen

$f = \{(x; y) \mid y = f(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in R, a \neq 0\}$

Von besonderem Interesse sind die Nullstellen der quadratischen Funktion. Zur Bestimmung der Nullstellen muß man die quadratische Gleichung $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ lösen.
Für die Berechnung der Nullstellen hat man die

■ Lösungsformel:

$$x_{01,02} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Den Charakter der Nullstellen der quadratischen Funktion (Lösungen der quadratischen Gleichung) bestimmt die Diskriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

■ Es gibt für

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 & \text{zwei verschiedene reelle Nullstellen} \\ = 0 & \text{eine doppelte reelle Nullstelle} \\ < 0 & \text{keine reellen Nullstellen.} \end{cases}$$

Über das Verhalten der quadratischen Funktion im Unendlichen kann man folgendes sagen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (ax^2 + bx + c) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{für } a > 0 \\ -\infty & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

denn x^2 ist immer positiv.

Der Graph der Funktion f mit $y = f(x) = x^2$ heißt Normalparabel. Der Graph der Funktion f mit $y = f(x) = x^2 + px + q$ ist eine Normalparabel, die im Koordinatensystem verschoben ist. Bei einer doppelten reellen Nullstelle berührt der Graph die x-Achse. Bei einer einfachen reellen Nullstelle schneidet der Graph die x-Achse.

Der Graph der Funktion f mit $y = f(x) = ax^2$ ist eine Parabel, die für $a > 0$ bzw. $a < 0$ nach oben bzw. nach unten geöffnet ist,
die im Vergleich zur Normalparabel
für $|a| > 1$ gestreckt ist und
für $|a| < 1$ gestaucht ist.

Als Graph für die Funktionsgleichung $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ erhält man eine Parabel analog der Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$, die aber im Koordinatensystem verschoben ist.
Jede Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ besitzt eine Parabelachse und auf ihr einen Scheitelpunkt $S(x_s; y_s)$. Die Gleichung der Parabelachse ist $x = x_s$.

Weil die Parabelachse Symmetrieachse der Parabel ist, wird die Strecke zwischen den Nullstellen x_{01} und x_{02} der quadratischen Funktion halbiert. Deshalb ist

$$x_s = x_{01} + \frac{x_{02} - x_{01}}{2} = \frac{2x_{01} + x_{02} - x_{01}}{2} = \frac{x_{01} + x_{02}}{2}$$

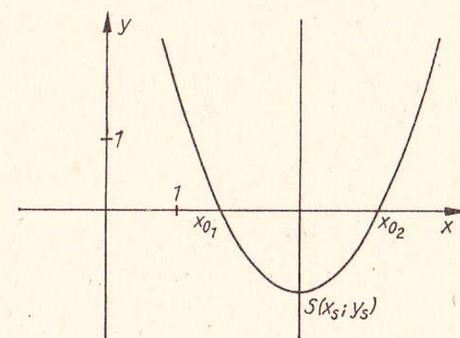


Abb. 27.1. Symmetrieachse und Scheitelpunkt einer Parabel

Da

$$x_{01} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

und

$$x_{02} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sind, folgt

$$x_s = -\frac{b}{2a}.$$

Die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitelpunkt $S\left(-\frac{b}{2a}; y_s\right)$.
Die Beziehung $x_s = -\frac{b}{2a}$ gilt auch dann, wenn die Parabel keine reellen Nullstellen hat.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welcher Term bestimmt den Charakter der Nullstellen einer quadratischen Funktion?

2. Wie heißt der Graph der quadratischen Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = x^2$?
3. Welche Gleichung hat eine im kartesischen Koordinatensystem verschobene Normalparabel?
4. Wie nennt man die Symmetrieachse einer Parabel?

Aufgaben

1. Welche Fälle für die Diskriminante Δ einer quadratischen Gleichung sind möglich, und was folgt daraus für die Nullstellen einer quadratischen Funktion?

2. Bestimmen Sie den Charakter der Nullstellen der Funktionen mit den folgenden Funktionsgleichungen:

1. $y = 3x^2 + 7x + 4$
2. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$
3. $y = x^2 - x + 1$
4. $y = 2x^2 - 12x + 18$

3. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen bzw. Ungleichungen!

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $x^2 - 7x + 6 = 0$
3. $x^2 - 10x + 24 = 0$
4. $x^2 + 3x + 2 = 0$
5. $x^2 + x - 6 = 0$
6. $x^2 + 11x + 24 = 0$
7. $3x^2 - 9x + 6 = 0$
8. $5x^2 - 9x - 2 = 0$
9. $2x^2 + 6x - 8 = 0$
10. $3x^2 - 2x - 5 > 0$
11. $x^2 - 5x + 4 = 0$
12. $x^2 - 10x + 21 = 0$
13. $x^2 - 10x + 16 = 0$
14. $x^2 + 9x + 20 = 0$
15. $x^2 + 2x - 48 \geqq 0$
16. $x^2 - 2x + 99 < 0$
17. $9x^2 - 10x + 1 = 0$
18. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
19. $11x^2 - 12x + 1 = 0$
20. $4x^2 + 13x + 3 = 0$

4. Bilden Sie Äquivalenzen!

Die Zahlen $+1$ und -1 erfüllen die Gleichung $x^n - 1 = 0$.

► Genau dann, wenn die Zahlen $+1$ und -1 die Gleichung $x^n - 1 = 0$ erfüllen, ist n eine gerade Zahl.

1. Die Diskriminante $b^2 - 4ac$ einer quadratischen Gleichung ist kleiner als Null.
2. Die Gleichung $x^2 + a = 0$ hat reelle Lösungen.
3. Die Gleichung $x^2 + px + 1 = 0$ ist in der Menge der reellen Zahlen lösbar.

5. Lösen Sie folgende Textaufgaben!

1. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 24 cm². Die beiden Katheten unterscheiden sich um 2 cm. Wie lang sind sie?
2. Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 168 m², der Umfang 62 m. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?
3. Ein Rechteck hat den Flächeninhalt $A = 20\,\text{cm}^2$ und den Umfang $U = 16\,\text{cm}$.
Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks!

6. Bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen für folgende quadratische Funktionen!

1. $f_1: y = 6x^2 + 7$
2. $f_2: y = \frac{1}{10}x^2 + 7x - 3$
3. $f_3: y = 1 + 8x - 2x^2$
4. $f_4: y = -x^2 + x$
5. $f_5: y = -3x^2 - 6x + 8$

7. Eine quadratische Funktion kann zwei einfache reelle Nullstellen, eine doppelte reelle Nullstelle oder keine reellen Nullstellen haben.
Wie verhält sich der Graph einer quadratischen Funktion im kartesischen Koordinatensystem an den Nullstellen der quadratischen Funktion?

8. Vergleichen Sie den Graph der quadratischen Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = ax^2$ und die Normalparabel, wenn $a > 0$, $a < 0$, $|a| > 1$ und $|a| < 1$ ist!

9. Zeigen Sie, wie man die Abszisse $x_s = -\frac{b}{2a}$ des Scheitels einer Parabel aus der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ herleitet!

10. Berechnen Sie die Scheitelkoordinaten der Parabeln aus den Funktionsgleichungen der quadratischen Funktionen von Aufgabe 6.!
Schneiden die Parabeln die x-Achse?
Beachten Sie dabei, ob die Parabeln nach oben oder unten geöffnet sind!

28. Nullstellen und Verhalten im Unendlichen von ganzrationalen Funktionen

Über den Definitionsbereich und die Stetigkeit bei ganzrationalen Funktionen konnten allgemeingültige Aussagen gemacht werden. Jetzt sollen einige spezielle Aussagen über die Nullstellen und das Verhalten im Unendlichen einer ganzrationalen Funktion folgen.

Nullstellen

Die Bestimmung der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ führt auf das Lösen einer Gleichung n-ten Grades $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. Bei Gleichungen 3. und 4. Grades gibt es wie bei den quadratischen Gleichungen Lösungsformeln, die aber sehr kompliziert sind.
Keine Lösungsformeln gibt es für die allgemeinen Gleichungen n-ten Grades mit $n > 4$. Obwohl es für diese Gleichungen keine Lösungsformeln gibt, kann man etwas über die Anzahl der Lösungen sagen. Jede Gleichung n-ten Grades hat n Lösungen, die aber im allgemeinen nicht alle reell sind. Daraus folgt für die ganzrationalen Funktionen n-ten Grades der Satz:

■ Jede ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n reelle Nullstellen.

Für einige spezielle ganzrationale Funktionen n-ten Grades kann man Nullstellen bzw. mindestens eine Nullstelle relativ einfach berechnen. Wir betrachten zuerst 2 Fälle.

1. $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_k x^k \quad (n > k;\ k > 0)$

Aus $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_k x^k = x^k(a_n x^{n-k} + a_{n-1}x^{n-1-k} + \ldots + a_{k+1}x + a_k) = 0$ folgt $x^k = 0$. Die Funktion f hat eine k-fache Nullstelle $x = 0$.

Beispiel: $y = f(x) = 6x^4 + x^3 - 2x^2$
Da das konstante und das lineare Glied null sind, kann man x^2 ausklammern, und es folgt $x^2(6x^2 + x - 2) = 0$.

Dieses Produkt ist null, wenn $x^2 = 0$ oder $6x^2 + x - 2 = 0$ ist. Daraus ergeben sich für f die Nullstellen
$x_{1/2} = 0;\quad x_3 = \frac{1}{2};\quad$ und $\quad x_4 = -\frac{2}{3}$.

2. $y = f(x) = ax^{2n} + bx^n + c;\quad (n \in G^+)$

Durch Einführung einer neuen Variablen $z = x^n$ wird die Bestimmung der Nullstellen von f auf das Lösen der quadratischen Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ zurückgeführt.

Beispiel: $y = f(x) = x^4 + 2x^2 - 63$
Wenn man $x^2 = z$ setzt, so bekommt man bei der Nullstellenbestimmung die quadratische Gleichung $z^2 + 2z - 63 = 0$. Sie hat die Lösungen $z_1 = 7$ und $z_2 = -9$. Führt man wieder die Variable x ein, so erhält man $z_1 = x_1^2 = 7$ und $z_2 = x_2^2 = -9$. Aus $x_1^2 = 7$ folgen $x_{11} = \sqrt{7}$ und $x_{12} = -\sqrt{7}$; aber $x_2^2 = -9$ hat keine reellen Lösungen. Die ganzrationale Funktion 4-ten Grades (biquadratische Funktion) mit $y = f(x) = x^4 + 2x^2 - 63$ hat nur die beiden reellen Nullstellen $x_{11} = \sqrt{7}$ und $x_{12} = -\sqrt{7}$.

Wir wollen noch einen dritten Fall betrachten.
Dazu beachten wir, daß zwei ganzrationale Funktionen n-ten Grades identisch sind, wenn sie die gleichen Nullstellen und den gleichen Koeffizienten a_n haben. So sind die Funktion f_1 mit $f_1(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ mit den Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und die Funktion f_2 mit $f_2(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ identisch.
$\forall x_i$ gilt nämlich: x_i ist nach Voraussetzung Nullstelle von f_1 und außerdem Nullstelle von f_2, weil für $x = x_i$ der Faktor $(x - x_i)$ und damit $f_2(x)$ null werden.
Diese Erkenntnis führt zu folgendem Satz:

■ Wenn eine ganzrationale Funktion f mit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hat, so kann man $f(x)$ als Produkt von Linearfaktoren darstellen:

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Beispiel:

Die Funktion f mit $y = f(x) = 6x^2 + x - 2$ hat die Nullstellen $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{2}{3}$. Die Darstellung als Produkt von Linearfaktoren lautet: $f(x) = 6(x - \frac{1}{2})(x + \frac{2}{3})$.

Aus obigem Satz ergibt sich als Folgerung:

■ Wenn x_1 eine reelle Nullstelle der ganzrationalen Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ist, dann ist $f(x)$ durch $x - x_1$ teilbar.

Bei der Division von $f(x)$ durch den Linearfaktor $x - x_1$ erhält man ein Polynom $g(x)$ vom Grade $(n - 1)$. Man kann schreiben: $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$.

Jetzt können wir einen weiteren Satz beweisen, der uns hilft, Nullstellen spezieller ganzrationaler Funktionen n-ten Grades zu finden.

■ Wenn die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ nur ganzzahlige Koeffizienten $a_k \in G$ $(k = 0; 1; \ldots; n)$ hat, ist jede ganzzahlige Nullstelle $x_0 \in G$ ein Teiler von a_0.

Das sieht man sehr leicht. Aus $a_n x_0^n + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = 0$ folgt

$$a_0 = -x_0(a_n x_0^{n-1} + \ldots + a_1).$$

$x_0 \in G$ muß ein Teiler von a_0 sein, denn in der Klammer steht eine ganze Zahl. a_k und x_0 sind nämlich nach Voraussetzung ganze Zahlen; deshalb sind die Produkte $a_k x_0^k$ ganze Zahlen, und ihre Summe ist auch eine ganze Zahl.

Beispiel:

Bestimmen Sie die Nullstellen der ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Funktionsgleichung

$y = f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$!

Diese ganzrationale Funktion f hat ganzzahlige Koeffizienten. Wenn es ganzzahlige Nullstellen gibt, so sind sie Teiler von 12. Die Teiler von 12 sind: ± 1; ± 2; ± 3; ± 4; ± 6; und 12.
Durch Probieren findet man, daß $x_1 = -4$ eine Nullstelle ist.
$f(x)$ muß deshalb durch $(x + 4)$ teilbar sein:

$$\begin{array}{l} (x^3 + 4x^2 - 3x - 12) : (x + 4) = x^2 - 3 \\ \underline{-(x^3 + 4x^2)} \\ \quad / \\ \qquad\quad -3x - 12 \\ \qquad\quad \underline{-(-3x - 12)} \\ \qquad\qquad / \end{array}$$

Man erhält das Polynom zweiten Grades $g(x) = x^2 - 3$.
$x^2 - 3 = 0$ hat die Lösungen $x_2 = \sqrt{3}$ und $x_3 = -\sqrt{3}$. Die Funktion f hat die Nullstellen: $x_1 = -4$; $x_2 = \sqrt{3}$; $x_3 = -\sqrt{3}$. $f(x)$ kann als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden:

$y = f(x) = (x + 4)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion in der Umgebung einer Nullstelle hat bestimmte Eigenschaften. Man kann sie allgemein so darstellen:

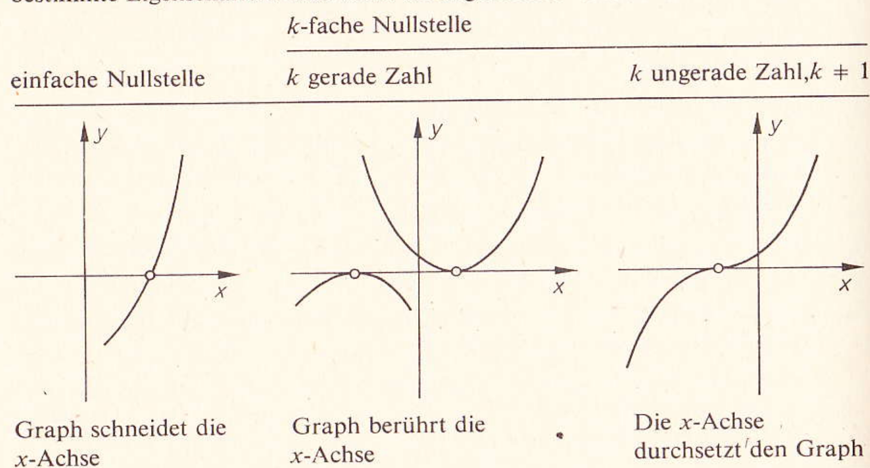


Abb. 28.1.

Verhalten im Unendlichen

Das Verhalten einer ganzrationalen Funktion im Unendlichen kann sehr einfach bestimmt werden. Für $x \neq 0$ kann in der Funktionsgleichung

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in G^+$, $a_k \in R$ und $a_n \neq 0$ die höchste Potenz der Variablen x ausgeklammert werden.
Man erhält

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^n \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} x^n \cdot a_n$$

Das bedeutet, daß das Verhalten der ganzrationalen Funktion im Unendlichen nur vom Verhalten der Funktion g mit $y = g(x) = x^n$ und dem Vorzeichen von a_n abhängt.
Man kann folgende Fälle unterscheiden:

1. $a_n > 0$

1.1. $n = 2m$ mit $m \in G^+$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = +\infty$$

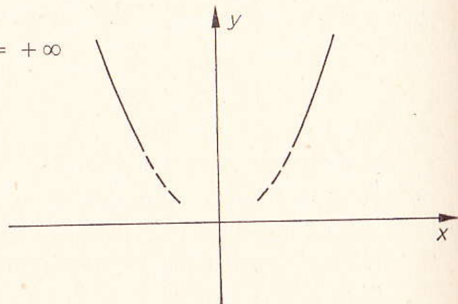


Abb. 28.2.

1.2. $n = 2m + 1$ mit $m \in G^+$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = \pm\infty$$

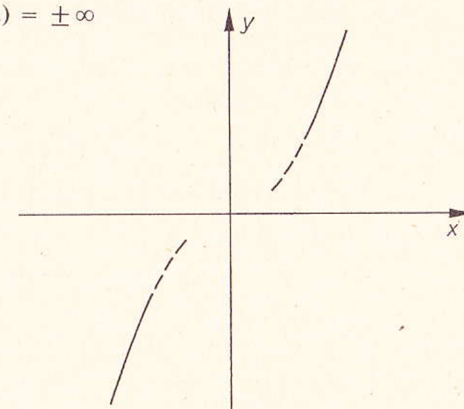


Abb. 28.3.

2. $a_n < 0$

2.1. $n = 2m$ mit $m \in G^+$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = -\infty$$

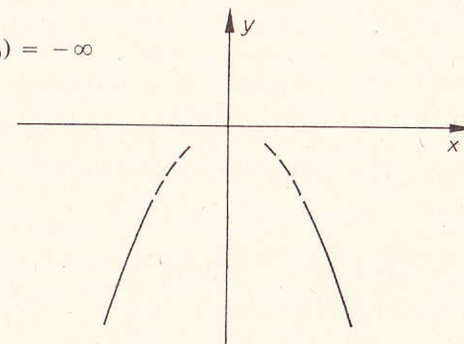


Abb. 28.4.

2.2. $n = 2m - 1$ mit $m \in G^+$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = \mp\infty$$

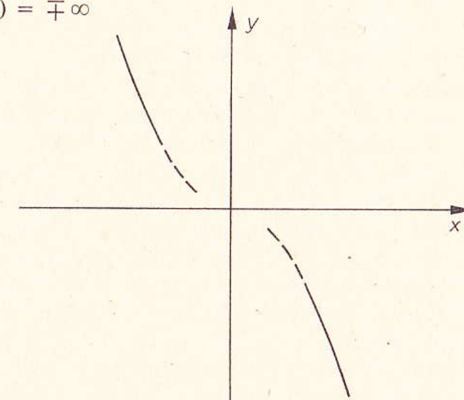


Abb. 28.5.

Beispiel:

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f mit $y = f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 10$ im Unendlichen!

Da der höchste Exponent 3 eine ungerade Zahl ist und da der Koeffizient von x^3 positiv ist, folgt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (4x^3 - 2x^2 + x - 10) = \pm\infty$$

Man kann natürlich auch folgende Methode anwenden:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (4x^3 - 2x^2 + x - 10)$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} x^3 \left(4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{10}{x^3}\right)$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} x^3 \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \left(4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{10}{x^3}\right)$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} x^3 \cdot 4 = \pm\infty$$

Für die ganzrationalen Funktionen ungeraden Grades ergibt sich aus der Stetigkeit und dem Verhalten im Unendlichen, daß diese Funktionen mindestens eine reelle Nullstelle haben müssen. Dagegen gibt es ganzrationale Funktionen geraden Grades, die keine reellen Nullstellen haben.

$y = x^3 - 8$ hat genau eine reelle Nullstelle $x = 2$.

$y = (x - 2)^3$ hat die dreifache reelle Nullstelle $x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

$y = x^4 + 1$ hat keine reelle Nullstelle.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wieviel Nullstellen hat eine ganzrationale Funktion n-ten Grades?
2. Wieviel reelle Nullstellen hat eine ganzrationale Funktion n-ten Grades höchstens?
3. Welche Gleichung muß man lösen, wenn man die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion bestimmen will?
4. Bei welchen Gleichungen n-ten Grades mit $n \geqq 3$ kann man auch ohne Lösungsformel mindestens eine Lösung bestimmen?
5. Wie kann man die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades schreiben, wenn $x_1; x_2; \ldots; x_n$ die Nullstellen der Funktion sind?
6. Welchen Teiler hat das Polynom $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, wenn x_0 eine Nullstelle der Funktion f mit $y = f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ist?
7. Warum ist jede ganzzahlige Nullstelle x_0 einer ganzrationalen Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten ein Teiler von a_0?
8. Wovon ist das Verhalten im Unendlichen einer ganzrationalen Funktion abhängig?
9. Warum muß eine ganzrationale Funktion fünften Grades mindestens eine reelle Nullstelle haben?

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Nullstellen der gegebenen ganzrationalen Funktionen!
   1. $f\colon y = 3x^3 - 2x^2 - x$
   2. $f\colon y = -2x^5 + x^3 - 7x^2 + 3x$ (nur eine Nullstelle berechnen)
   3. $f\colon y = x^4 - 4x^2 + 3$
   4. $f\colon y = x^5 + 4x^3 + 3x$
   5. $f\colon y = x^3 + 6x^2 + 10x$
   6. $f\colon y = x^4 - 13x^2 + 36$

2. Beweisen Sie den Satz!
   Jede Nullstelle $x_0 \in G$ der ganzrationalen Funktion f mit
   $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ und $a_k \in G$ $(k = 0; \ldots; n)$
   ist ein Teiler von a_0.

3. Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen, und schreiben Sie dann die Funktionsgleichung als Produkt von Linearfaktoren!
   1. $f\colon y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
   2. $f\colon y = x^3 + 7x^2 + 2x - 40$
   3. $f\colon y = -x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 16x - 20$
   4. $f\colon y = -x^3 + 2x^2 + 64x - 128$
   5. $f\colon y = -x^3 - 3x^2 + 24x - 28$
   6. $f\colon y = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$
   7. $f\colon y = x^5 + 2x^4 - 24x^3 - 22x^2 + 103x - 60$

4. Bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen der Funktionen von Aufgabe 3.1. bis 3.7.!

5. Skizzieren Sie den Graph der Funktionen der Aufgaben 3.1. bis 3.7. mit Hilfe der Nullstellen und des Verhaltens im Unendlichen!

   $f\colon y = x^3 - x^2 - x + 1$

   ► Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_{2,3} = 1$ (doppelte Nullstelle)

   Verhalten im Unendlichen:

   $$\lim_{x \to \pm\infty} (x^3 - x^2 - x + 1) = \pm\infty$$

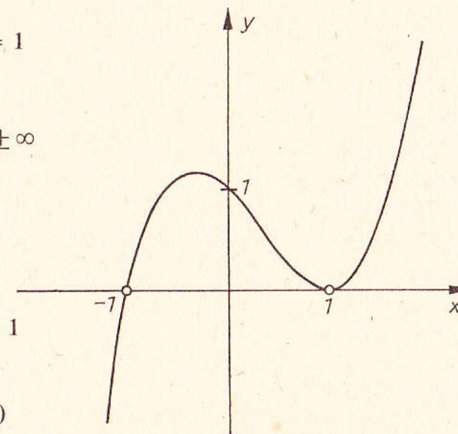


Abb. 28.6.

Das Maximum der Funktion zwischen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ soll hier nicht berechnet werden. (keine graphische Darstellung, sondern Skizze!)

6. In welchen Intervallen für x sind die Funktionswerte der Funktionen von Aufgabe 3.1. bis 3.7. größer oder gleich Null?

7. Berechnen Sie die Nullstellen, und bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen der folgenden Funktionen!
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen!

1. $f\colon y = (x-3)^2$
2. $f\colon y = (x-1)^3$
3. $f\colon y = (x^2+2)^2$
4. $f\colon y = (x-2)^2 \cdot (x+1)(x-3)$
5. $f\colon y = -(x+2)^2$
6. $f\colon y = x \cdot (x^2-4)^2$
7. $f\colon y = x^3 - 1$

29. Gebrochenrationale Funktionen

▶ **Def.:** Eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ heißt gebrochenrationale Funktion genau dann, wenn $f(x)$ Quotient aus zwei Polynomen ist, wenn der Grad des Nennerpolynoms $\geqq 1$ ist und wenn der Nenner kein Teiler des Zählers ist.

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i}{\sum\limits_{j=0}^{m} b_jx^j}$$

mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$; $n, m \in N$ und $m \geqq 1$.

Beispiele:

f_1 mit $y = \dfrac{7x^2+1}{10x-3}$ ist eine gebrochenrationale Funktion,

f_2 mit $y = \dfrac{7x^2+3x-2}{6}$ ist keine gebrochenrationale Funktion, denn es ist $m = 0$.

f_3 mit $y = \dfrac{x^3+x}{x^2+1}$ ist keine gebrochenrationale Funktion, denn es gilt: $\dfrac{x^3+x}{x^2+1} = \dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x$.

Eine gebrochenrationale Funktion heißt echt gebrochen, wenn der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist. Alle anderen gebrochenrationalen Funktionen sind unecht gebrochen.
Die unecht gebrochenrationalen Funktionen lassen sich durch Partialdivision in eine ganzrationale und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegen.

Beispiel:

$$\frac{x^2+x-6}{x+4} = x - 3 + \frac{6}{x+4}$$

Einige Eigenschaften:
Der größtmögliche Definitionsbereich der gebrochenrationalen Funktion f ist $D(f) = R \setminus \{x_k\}$, wobei x_k die Nullstellen der Nennerfunktion sind.
In den Nullstellen der Nennerfunktion ist die gebrochenrationale Funktion f unstetig, denn f ist für x_k nicht definiert, aber in einer Umgebung von x_k.

▶ **Def.:** x_k heißt ein Pol der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ genau dann, wenn $v(x_k) = 0$ und $u(x_k) \neq 0$ sind.
Man sagt: f hat an der Stelle x_k einen Pol.

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = \dfrac{1}{x-2}$

Der Definitionsbereich von f ist $D(f) = R \setminus \{2\}$, weil $x_k = 2$ eine Nullstelle der Nennerfunktion ist.
Die Funktion f hat an der Stelle $x_k = 2$ einen Pol, weil $v(2) = 0$ ist und der Zähler immer ungleich Null ist.
Um das Verhalten der Funktion f in der Umgebung von $x_k = 2$ kennenzulernen, stellt man eine Wertetabelle auf:

x	$2+0{,}5=2{,}5$	$2+0{,}4=2{,}4$	$2+0{,}3=2{,}3$	$2+0{,}2=2{,}2$	$2+0{,}1=2{,}1$
y	2,0	2,5	3,3 ...	5,0	10,0
x	$2-0{,}5=1{,}5$	$2-0{,}4=1{,}6$	$2-0{,}3=1{,}7$	$2-0{,}2=1{,}8$	$2-0{,}1=1{,}9$
y	−2,0	−2,5	−3,3 ...	−5,0	−10,0

An den Polstellen ist
$\lim\limits_{x \to x_k} f(x) = \pm\infty$.
Die Gerade mit der Gleichung $x = x_k$ heißt Polasymptote. Der Graph der Funktion f nähert sich der Geraden $x = x_k$ asymptotisch.

$\lim\limits_{\substack{x \to x_k \\ x > x_k}} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_k} f(x)$ heißt der rechtsseitige Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_k.

$\lim\limits_{\substack{x \to x_k \\ x < x_k}} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow x_k} f(x)$ heißt der linksseitige Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_k.

Die Symbole $\lim\limits_{x \nearrow x_k} f(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow x_k} f(x)$ liest man:
limes $f(x)$ für aufsteigende x oder x von links gegen x bzw. limes $f(x)$ für fallende x oder x von rechts gegen x.

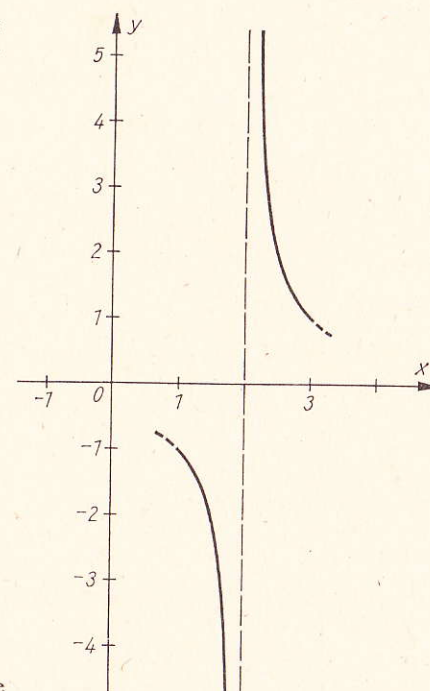


Abb. 29.1. Verhalten an einer Polstelle

Wenn x_k eine doppelte Nullstelle von $v(x)$ ist, haben beide Grenzwerte das gleiche Vorzeichen. Man sagt: f hat an der Stelle x_k einen Pol gerader Ordnung. Wenn x_k eine einfache Nullstelle von $v(x)$ ist, haben beide Grenzwerte verschiedene Vorzeichen, und f hat einen Pol ungerader Ordnung.

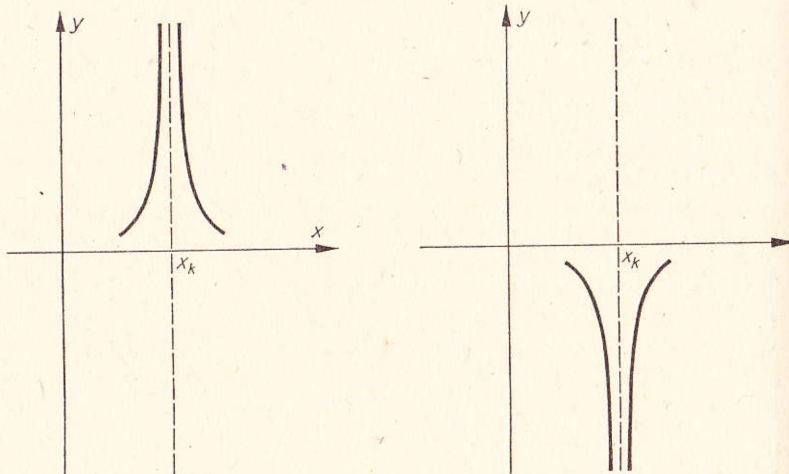


Abb. 29.2. Pole gerader Ordnung

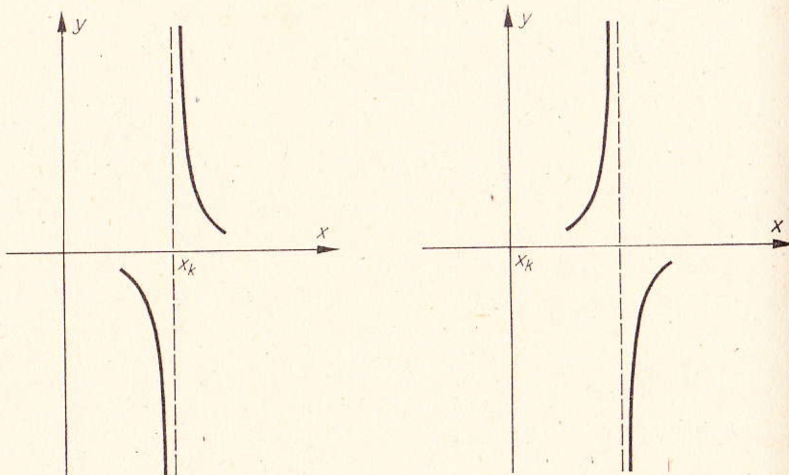


Abb. 29.3. Pole ungerader Ordnung

Beispiele:

(1) Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen und den Charakter der Unstetigkeit der Funktion f mit

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2 + x - 6}{x + 4}!$$

f ist für $x_1 = -4$ nicht definiert, weil $v(-4) = 0$ ist. In der Umgebung von x_1 ist die Funktion f definiert; deshalb ist die Funktion f an der Stelle $x_1 = -4$ unstetig.
Für das Zählerpolynom $u(x)$ gilt an der Stelle $x_1 = -4$:

$$u(-4) = (-4)^2 + (-4) - 6 = 6 \neq 0.$$

Die Funktion f hat deshalb in $x_1 = -4$ einen Pol.
Bestimmung des rechts- und linksseitigen Grenzwertes ($\varepsilon > 0$);

1) rechtsseitig: Mit Hilfe der Grenzwertsätze findet man

$$\lim_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} \frac{x^2 + x - 6}{x + 4} = \frac{6}{\lim\limits_{\substack{x \to -4+\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} (x + 4)}$$

$$= \frac{6}{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (-4 + \varepsilon + 4)} = \frac{6}{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (+\varepsilon)} = +\infty.$$

2) linksseitig:

$$\lim_{\substack{x \to -4 \\ x < -4}} f(x) = \frac{6}{\lim\limits_{\substack{x \to -4-\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} (x + 4)} = \frac{6}{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (-4 - \varepsilon + 4)}$$

$$= \frac{6}{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon)} = -\infty.$$

Wir erkennen:
Da $x_1 = -4$ eine einfache Nullstelle von v ist und somit ein Pol ungerader Ordnung vorliegt, sind die Vorzeichen des rechtsseitigen Grenzwertes und des linksseitigen Grenzwertes verschieden. Die Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = -4$ ist die Polasymptote.
Wenn man erkannt hat, daß die Nennerfunktion eine einfache Nullstelle hat, genügt es, den rechtsseitigen oder den linksseitigen Grenzwert zu bestimmen.

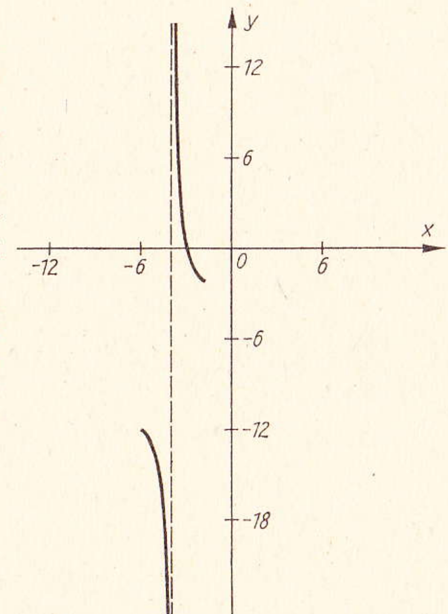


Abb. 29.4.

(2) Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen und den Charakter der Unstetigkeit der Funktion f mit

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{0{,}1x}{x^2 + 4x + 4} = \frac{0{,}1x}{(x+2)^2}$$

In diesem Beispiel ist $v(-2) = 0$, d. h., die Funktion f ist an dieser Stelle nicht definiert. Da aber die Funktion f in einer Umgebung von -2 definiert ist, liegt an dieser Stelle eine Unstetigkeit vor.
Der Wert des Zählerpolynoms $u(x)$ beträgt $u(-2) = -0{,}2$, deshalb hat f an dieser Stelle einen Pol.
Bestimmung des rechts- und linksseitigen Grenzwertes an der Polstelle ($\varepsilon > 0$):

1) Der rechtsseitige Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{0{,}1x}{(x+2)^2} = \frac{-0{,}2}{\lim\limits_{\substack{x \to -2+\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} (-2+\varepsilon+2)^2}$$

$$= \frac{-0{,}2}{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2} = -\infty .$$

2) Der linksseitige Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = \frac{-0{,}2}{\lim\limits_{\substack{x \to -2-\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} (-2-\varepsilon+2)^2} = \frac{-0{,}2}{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon)^2} = \frac{-0{,}2}{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2} = -\infty .$$

Wir erkennen:
Da $x_1 = -2$ eine doppelte Nullstelle von v ist und somit ein Pol gerader Ordnung vorliegt, sind die Vorzeichen des rechts- und linksseitigen Grenzwertes gleich. $x = -2$ ist die Polasymptote.
Wenn man also erkannt hat, daß die Nennerfunktion v eine doppelte Nullstelle hat, dann genügt es, den rechtsseitigen oder den linksseitigen Grenzwert zu bestimmen.

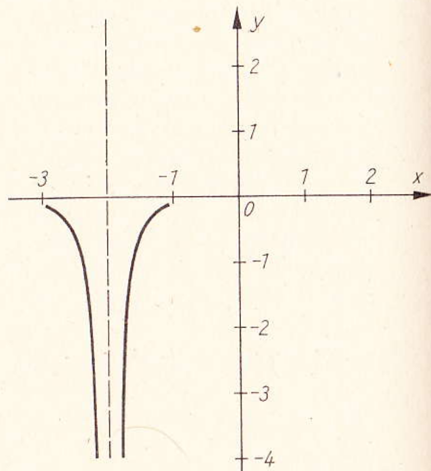


Abb. 29.5.

Wir betrachten weitere Eigenschaften der gebrochenrationalen Funktionen:
Wenn für bestimmte x_k gilt, daß $v(x_k) = 0$ und $u(x_k) = 0$ sind, so ist die gebrochenrationale Funktion auch an diesen Stellen unstetig. Für das Verhalten der Funktion an diesen Stellen sind besondere Untersuchungen notwendig.

■ x_0 ist Nullstelle von f, wenn $u(x_0) = 0$ und $v(x_0) \neq 0$ sind.

Die Untersuchung des Verhaltens im Unendlichen einer gebrochenrationalen Funktion soll an 3 Beispielen erläutert werden.

(1) Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Funktionsgleichung

$$y = f_1(x) = \frac{x+1}{x^2+1} .$$

Man klammert jeweils im Zähler und im Nenner die höchste Potenz von x aus.

Umformung:

$$f_1(x) = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \quad \text{mit} \quad x \neq 0.$$

Grenzwertbildung:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Die Funktionswerte $f_1(x)$ der Funktion f_1 nähern sich für sehr große absolute Beträge der Variablen x immer mehr dem Wert null. Deshalb nennt man die x-Achse eine Asymptote des Graphen der Funktion f_1.

(2) Gegeben ist die Funktion f_2 mit $y = f_2(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Umformung:

$$\text{Für } x \neq 0 \text{ folgt } f_2(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} .$$

Grenzwertbildung:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1 .$$

Für den Graph dieser gebrochenrationalen Funktion ist die Parallele zur x-Achse, die den Abstand 1 hat, eine Asymptote.

(3) Gegeben ist die Funktion f_3 mit $y = f_3(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 4}$.

Umformung:

Für $x \neq 0$ folgt $f_3(x) = \dfrac{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{4}{x}\right)} = x\,\dfrac{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{4}{x}}$.

Grenzwertbildung:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x\,\frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{4}{x}} = \pm\infty.$$

Die Funktionswerte streben gegen $+\infty$, wenn $x \to +\infty$ geht, und gegen $-\infty$, wenn $x \to -\infty$ geht.

$$f_3(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 4} = x - 3 + \frac{6}{x + 4} = g(x) + r(x)$$

mit

$$g(x) = x - 3 \quad \text{und} \quad r(x) = \frac{6}{x + 4}.$$

Da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x) = 0$ gilt, folgt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)$.

f_3 verhält sich im Unendlichen wie die Funktion g. Für $x \to \pm\infty$ nähern sich die Graphen von f_3 und g asymptotisch; deshalb ist die Gerade mit der Gleichung $y = g(x) = x - 3$ eine Asymptote des Graphen der Funktion f_3.

Zusammenfassung:

Man kann das Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen mit

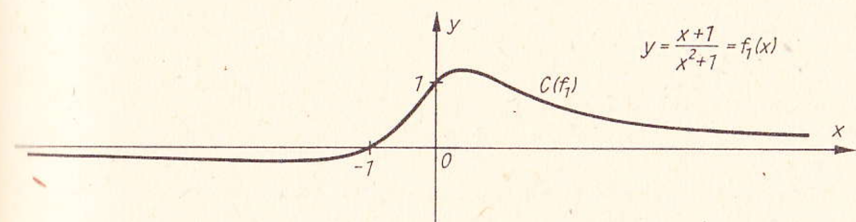
$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum\limits_{l=0}^{m} b_e x^e}$$

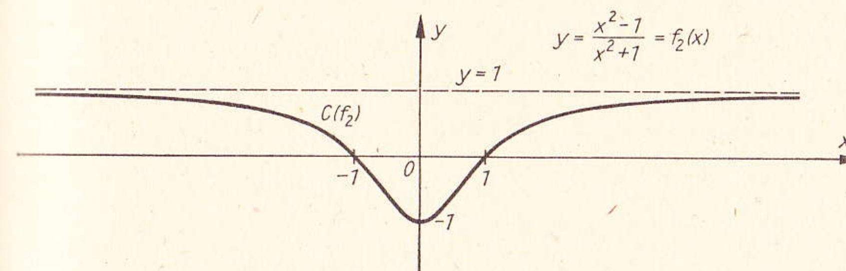
folgendermaßen zusammenfassen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{für } n = m \\ +\infty \text{ bzw. } -\infty & \text{für } n > m \end{cases}$$

(Das Vorzeichen muß durch Grenzwertuntersuchungen bestimmt werden.)

Die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und f_3:





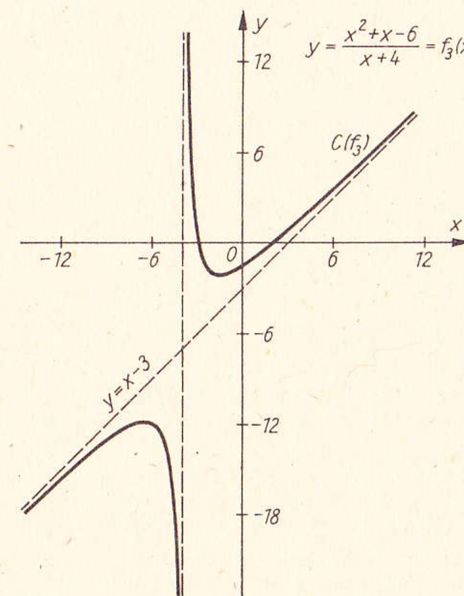


Abb. 29.6. Graphen der Funktionen f_1, f_2, f_3

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie ist eine gebrochenrationale Funktion definiert?
2. Unter welcher Bedingung ist eine gebrochenrationale Funktion echt gebrochen?
3. Durch welche Methode läßt sich eine unecht gebrochenrationale Funktion in eine ganzrationale und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegen?
4. Welchen größtmöglichen Definitionsbereich hat eine gebrochenrationale Funktion f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$?
5. An welchen Stellen ist eine gebrochenrationale Funktion f unstetig?
6. Was versteht man unter dem Pol einer gebrochenrationalen Funktion f?
7. Was versteht man unter dem rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert einer Funktion f mit $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_k$?
8. Was für einen Pol hat $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ an der Stelle x_k, wenn x_k eine einfache (bzw. doppelte) Nullstelle von $v(x)$ ist?
9. Was versteht man unter einem Pol gerader (bzw. ungerader) Ordnung?
10. Unter welcher Bedingung ist x_0 eine Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$?
11. Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Wie verhält sich der Graph für $x \to \pm\infty$? Wie nennt man in diesem Fall die x-Achse?
12. Gegen welche Werte geht die Funktion $f(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$ für $x \to \pm\infty$? (Geben Sie die Grenzwerte und die Bedingungen an!)

Aufgaben

1. Setzen Sie die Präposition „für“ und das Relativpronomen ein, und ergänzen Sie den Satz!

Die Werte $x = x_0$, … … $f(x_0) = 0$ gilt, nennt man … … der Funktion f.
► Die Werte $x = x_0$, für die $f(x_0) = 0$ gilt, nennt man die Nullstellen der Funktion f.

Die Funktion, … … die Funktionsgleichung $y = x^4$ gilt, ist im Intervall $(-\infty; 0]$ streng monoton …
Man nennt einen Ausdruck der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, … … $n \in N$, $a_k \in R$ und $a_n \neq 0$ gelten, ein Polynom … Grades.
Der größtmögliche Definitionsbereich der gebrochenrationalen Funktionen ist $(-\infty; \infty)$ mit Ausnahme der Stellen, … … das Nennerpolynom … wird.

2. Zerlegen Sie die unecht gebrochenrationalen Funktionen in eine ganzrationale und eine echt gebrochenrationale Funktion:

1. $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 9}{x - 5}$
2. $y = f(x) = \frac{5x^3 + 3x^2}{2x - 3}$
3. $y = f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{3x + 4}$

3. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktionen aus Übung 2.!

4. Untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen folgender Funktionen!

1. $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 5}$
2. $y = f(x) = \frac{19 + 1x - x^2}{15 + 6x + x^2}$
3. $y = f(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 7}$
4. $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 9}{x - 5}$
5. $y = f(x) = \frac{5x^3 + 3x^2}{2x - 3}$
6. $y = f(x) = \frac{3x^3 + x}{x^3 - 1}$
7. $y = f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$
8. $y = f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 6x + 11}$
9. $y = f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{3x + 4}$

5. Stellen Sie die gegebenen Eigenschaften der Funktionen f graphisch dar!

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ und $f(x) > 1$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ und $f(x) < 2$
3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ und $f(x) > 0$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1, f(x) > -1$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1, f(x) < -1$
5. $\lim\limits_{\substack{x \to 3+\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 3-\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} f(x) = -\infty$
6. $\lim\limits_{\substack{x \to 0+\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0-\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} f(x) = +\infty$
7. $\lim\limits_{\substack{x \to -1+\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to -1-\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} f(x) = -\infty$

6. Untersuchen Sie das Verhalten an den Polen!

1. $y = f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$
2. $y = f(x) = \frac{x}{2 - x}$
3. $y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$
4. $y = f(x) = \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + 10x + 25}$
5. $y = f(x) = \frac{2}{x + 2}$
6. $y = f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$
7. $y = f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x - 6}$
8. $y = f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - x^2 - 4}$

7. Zeichnen Sie die Graphen der Funktion f mit $y = f(x)$!
Bestimmen Sie dazu jeweils den Definitionsbereich, das Verhalten an den Unstetigkeitsstellen, die Nullstellen, den Abschnitt auf der y-Achse und das Verhalten im Unendlichen!

1. $y = f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ 2. $y = f(x) = \frac{-2}{x+3}$ 3. $y = f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$

30. Potenzfunktionen mit $y = x^n$, $n \in G$

Die Potenzfunktionen mit der Funktionsgleichung $y = x^n$ und $n \in G$ sind spezielle rationale Funktionen. Folgende Einteilung dieser Potenzfunktionen ist zweckmäßig:

1. Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten $n \geqq 2$
   1.1. $y = x^{2k}$ $(k \in N \setminus \{0\})$ gerade natürliche Exponenten
   1.2. $y = x^{2k+1}$ $(k \in N \setminus \{0\})$ ungerade natürliche Exponenten
2. Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten
   2.1. $y = x^{-2k}$ $(k \in N \setminus \{0\})$ negative gerade Exponenten
   2.2. $y = x^{-(2k+1)}$ $(k \in N)$ negative ungerade Exponenten
3. Potenzfunktionen mit Exponenten $n = 0$ und $n = 1$
   3.1. $y = x^0$; $x \neq 0$, denn 0^0 ist nicht definiert
   3.2. $y = x^1$

Beispiel:

Eigenschaften der Potenzfunktionen mit negativen geraden Exponenten

Funktionsgleichung: $y = x^{-2k}$ bzw. $y = \frac{1}{x^{2k}}$ $(k \in N \setminus \{0\})$

$D(f) = R \setminus \{0\}$, $W(f) = R^+$.

Es gibt keine Nullstellen.
An der Stelle $x_p = 0$ sind die Funktionen nicht definiert und deshalb unstetig. Sie haben an dieser Stelle einen Pol gerader Ordnung.
Die Funktionen sind im Intervall $I_1 = (-\infty; 0)$ streng monoton wachsend und in $I_2 = (0; +\infty)$ streng monoton fallend. Für jedes $k \in N \setminus \{0\}$ ist $\lim_{x \to \pm\infty} x^{-2k} = 0$. Deshalb ist die x-Achse Asymptote der Graphen der Funktionen. Die Annäherung des Graphen an die Asymptote erfolgt von oben.
Alle diese Funktionen sind gerade Funktionen, denn

$$f(-x) = (-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k} = f(x).$$

Die Graphen der Funktionen liegen axialsymmetrisch zur y-Achse.

Außerdem gilt: Alle Funktionen enthalten die geordneten Paare $(-1; 1)$ und $(1; 1)$. Ihre Graphen gehen deshalb durch die Punkte $P_1(-1; 1)$ und $P_2(1; 1)$.
Die Graphen von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten $n \geqq 2$ werden als Parabeln bezeichnet. Die Graphen der Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten heißen Hyperbeln. Eine Hyperbel besteht aus zwei Teilen, die man Hyperbeläste nennt.
Auch Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^n$ $(a \in R;\ a \neq 0)$ sind Potenzfunktionen.
Solche Potenzfunktionen haben große Bedeutung für viele Bereiche der Wissenschaft und Technik. Einige Beispiele für ihre Anwendung sind folgende:

(1) $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V(r) \sim r^3$

Das Volumen einer Kugel ist proportional der 3. Potenz der Radiuslänge.

(2) $s(t) = \frac{g}{2} t^2$

$s(t) \sim t^2$

Der Weg eines Körpers beim freien Fall im Vakuum ist proportional dem Quadrat der Fallzeit.

(3) $F(r) = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot r^2}$

$F(r) \sim \frac{1}{r^2}$

Die Kraft zwischen zwei elektrischen Punktladungen Q_1 und Q_2 ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen beiden Ladungen.
Den Graph einer Funktion mit $y = ax^n$ erhält man aus dem Graph der Funktion mit $y = x^n$

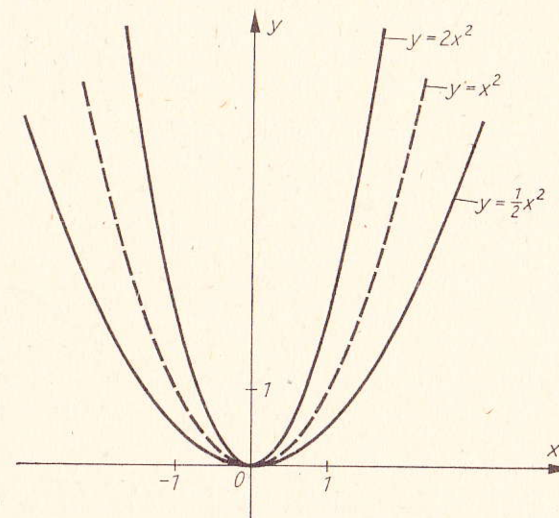
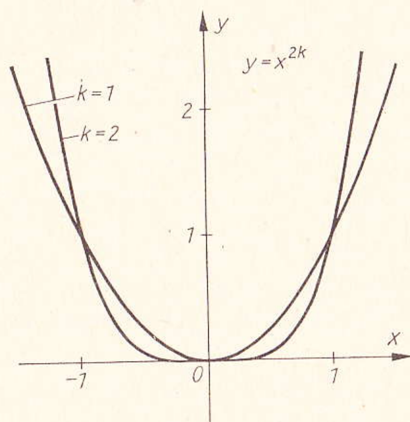


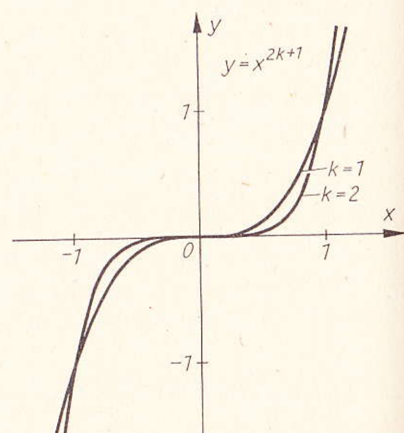
Abb. 30.1. Potenzfunktionen mit $y = ax^2$

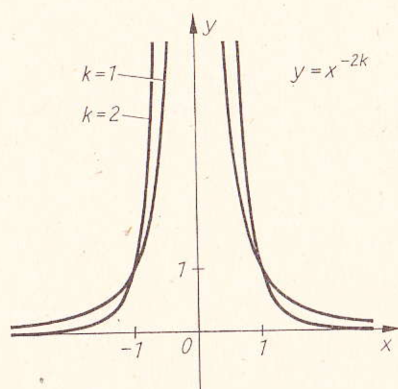
für $a < 0$ durch eine Spiegelung an der x-Achse,
für $|a| > 1$ durch eine Streckung in Richtung der y-Achse von der x-Achse weg,
für $|a| < 1$ durch eine Stauchung in Richtung der y-Achse zur x-Achse hin.

Abb. 30.2. Die Potenzfunktion mit $y = -x^2$

Auf die gleiche Weise erhält man aus dem Graph einer beliebigen Funktion mit $y = f(x)$ den Graph der Funktion mit $y = af(x)$.







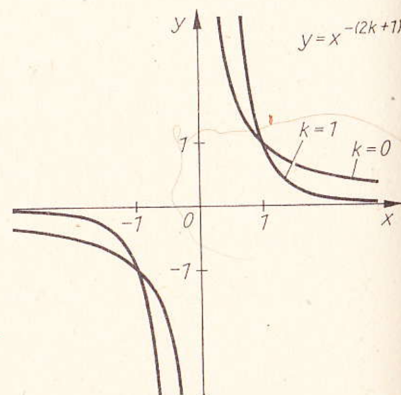


Abb. 30.3. Potenzfunktionen mit $y = x^n$ $n \in N \setminus \{0; 1\}$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welche Einteilung der Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten ist zweckmäßig?
2. Wie nennt man die Graphen der Potenzfunktionen mit der Gleichung $y = x^n$ mit $n \in N$ und $n \geqq 2$?
3. Wie nennt man die Graphen der Potenzfunktionen mit der Gleichung $y = x^n$ mit $n \in G^-$?
4. Wie erhält man den Graph der Funktion g mit $y = g(x) = ax^n$ aus dem Graph der Funktion f mit $f(x) = x^n$, wenn a die folgenden Bedingungen erfüllt:

   1. $a = -1$ 3. $-1 < a < 0$ 5. $a < -1$
   2. $a > 1$ 4. $0 < a < 1$
5. Wie erhält man den Graph einer Funktion mit $y = -f(x)$ aus dem Graph der Funktion mit $y = f(x)$?
6. Warum sind Kenntnisse über Potenzfunktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^n$ besonders wichtig?

Aufgaben

1. streng monoton wachsend (fallend) sein

Setzen Sie streng monoton wachsend bzw. fallend ein!

Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = -2x$ ist ...
► Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = -2x$ ist im Intervall $(-\infty; \infty)$ streng monoton fallend.

Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x$ ist ...

Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = x^3$ ist ...
Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = x^2$ ist im Intervall ... und im Intervall ...

Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = x^{-2}$ ist im ...

Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = x^{-1}$ ist im ...

Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \dfrac{1}{x - x_0}$ ist im ...

2. Sprechen Sie über die Eigenschaften der Potenzfunktionen mit der Funktionsgleichung $y = x^{-2k}$ $(k \in G^+)$!

3. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Potenzfunktionen mit den Gleichungen
   1. $y = x^{2k+1}$ $(k \in N \setminus \{0\})$
   2. $y = x^{2k}$ $(k \in N \setminus \{0\})$
   3. $y = x^{-(2k+1)}$ $(k \in N)$!

4. Beweisen Sie, daß
   1. die Potenzfunktionen mit $y = x^{-2k}$ ($k \in G^+$) gerade Funktionen und
   2. die Potenzfunktionen mit $y = x^{2k+1}$ ($k \in N$) ungerade Funktionen sind!

5. Formulieren Sie Aussagen über Proportionalitäten, die durch folgende Gleichungen dargestellt werden!

   1. $I(U) = \frac{1}{R} U$ 3. $W_{kin}(v) = \frac{m}{2} v^2$

   2. $R(A) = \frac{1}{A}$ 4. $E(r) = \frac{Q}{4r^2}$

6. Strecken bzw. stauchen Sie entsprechend dem gegebenen Faktor a den Graph der Funktion f in Richtung der y-Achse, so daß Sie den Graph einer Funktion g erhalten! Spiegeln Sie dann den Graph von g an der x-Achse! Sie erhalten dadurch den Graph einer Funktion h.
   a) Zeichnen Sie die Graphen von f, g, h in ein und dasselbe Koordinatensystem!
   b) Geben Sie die Gleichungen der Funktionen g und h an!

   1. $y = f(x) = x^3$; $a = \frac{1}{2}$ 3. $y = f(x) = x^2 - 4$; $a = \frac{1}{4}$

   2. $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$; $a = 2$

31. Graphen von Funktionen mit Gleichungen der Form $y = f(x) + d$ und $y = f(x - c)$

Im Abschnitt „Potenzfunktionen" haben wir gesehen, daß man zu einer gegebenen Funktion f mit $y = f(x)$ durch Veränderung ihrer Funktionsgleichung neue Funktionen g mit Gleichungen der Form $y = g(x) = a \cdot f(x)$ bilden kann, deren Graphen auf einfache Weise aus dem bekannten Graph von f hervorgehen.
Im folgenden wollen wir weitere Erkenntnisse darüber gewinnen, wie sich in einem fest vorgegebenen Koordinatensystem der Graph einer Funktion verändert, wenn man durch bestimmte Änderungen der Funktionsgleichung zu neuen Funktionen übergeht.

$y = f(x) \rightarrow y - d = f(x)$; $d \in R$, $d \neq 0$

Indem man in $y = f(x)$ die Variable y durch $y - d$ ersetzt, geht die Funktion f in eine Funktion g mit der Gleichung $y - d = f(x)$ bzw. $y = f(x) + d$ über. Vergleicht man die Funktionen f und g miteinander, so erkennt man:
An einer beliebigen Stelle $x_0 \in D(f)$ hat f den Funktionswert $f(x_0)$. An der gleichen Stelle x_0 nimmt g den Funktionswert $f(x_0) + d$ an: $g(x_0) = f(x_0) + d$.

Man erhält die Punkte $Q(x_0; y_0 + d) \in C(g)$, indem man jeden Punkt $P(x_0; y_0) \in C(f)$ um d in Richtung der y-Achse verschiebt.

Beispiele:

(1) $y = f(x)$
$= \sqrt{x} \xrightarrow{d=2} y - 2 = \sqrt{x}$
$y = g(x) = \sqrt{x} + 2$

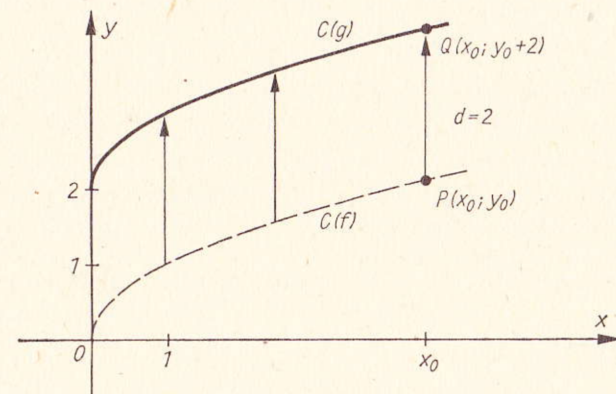


Abb. 31.1.

Verschiebung von $C(f)$ um 2 Einheiten in positiver Richtung der y-Achse, denn es ist $d = 2$.

(2) $y = f(x)$
$= \sqrt{x} \xrightarrow{d=-2} y + 2 = \sqrt{x}$
$y = g(x) = \sqrt{x} - 2$

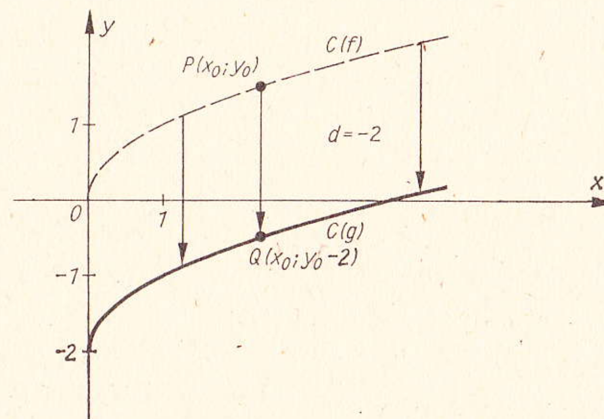


Abb. 31.2.

Verschiebung von $C(f)$ um 2 Einheiten in negativer Richtung der y-Achse, denn es ist $d = -2$.

Zusammenfassung:

■ Man erhält den Graph einer Funktion g mit $y - d = f(x)$ bzw. $y = g(x) = f(x) + d$ aus dem Graph der Funktion f mit $y = f(x)$
für $d > 0$ durch eine Verschiebung um d Einheiten in positiver Richtung der y-Achse,
für $d < 0$ durch eine Verschiebung um d Einheiten in negativer Richtung der y-Achse.

$y = f(x) \rightarrow y = f(x - c); \quad c \in R; \quad c \neq 0$

Indem man in $y = f(x)$ die Variable x durch $x - c$ ersetzt, geht die Funktion f in eine Funktion g mit der Gleichung $y = f(x - c)$ über.

Durch Vergleich von f und g erkennt man:

An einer beliebigen Stelle $x_0 \in D(f)$ hat f den Funktionswert $f(x_0)$. Den gleichen Funktionswert $f(x_0)$ nimmt g an der Stelle $x_0 + c$ an: $g(x_0 + c) = f(x_0 + c - c) = f(x_0)$. Man erhält also die Punkte $Q(x_0 + c; y_0) \in C(g)$, indem man jeden Punkt $P(x_0; y_0) \in C(f)$ um c in Richtung der x-Achse verschiebt.

Beispiele:

(1) $y = f(x) = x^2 - 1 \xrightarrow{c=2}$ $y = f(x - 2) = g(x) = (x - 2)^2 - 1$

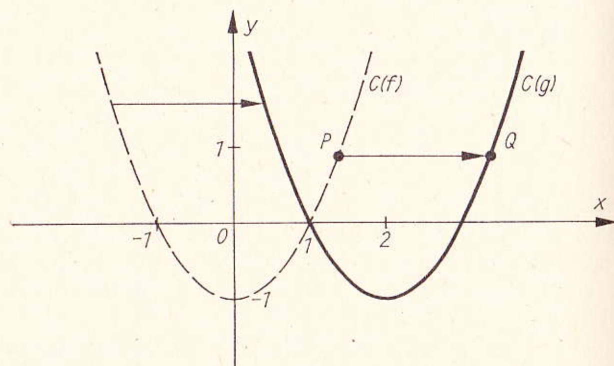


Abb. 31.3.

Verschiebung von $C(f)$ um 2 Einheiten in positiver Richtung der x-Achse, denn es ist $c = 2$.

(2) $y = f(x) = x^3 \xrightarrow{c=-2}$ $y = f(x + 2) = g(x) = (x + 2)^3$

Verschiebung von $C(f)$ um 2 Einheiten in negativer Richtung der x-Achse, denn es ist $c = -2$.

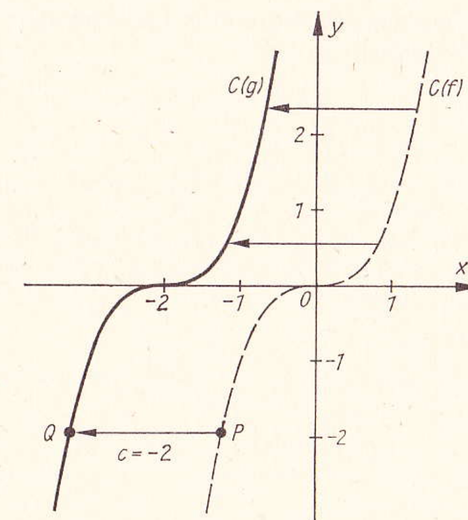


Abb. 31.4.

Zusammenfassung:

■ Man erhält den Graph einer Funktion g mit $y = g(x) = f(x - c)$ aus dem Graph der Funktion f mit $y = f(x)$
für $c > 0$ durch eine Verschiebung um c Einheiten in positiver Richtung der x-Achse
für $c < 0$ durch eine Verschiebung um c Einheiten in negativer Richtung der x-Achse.

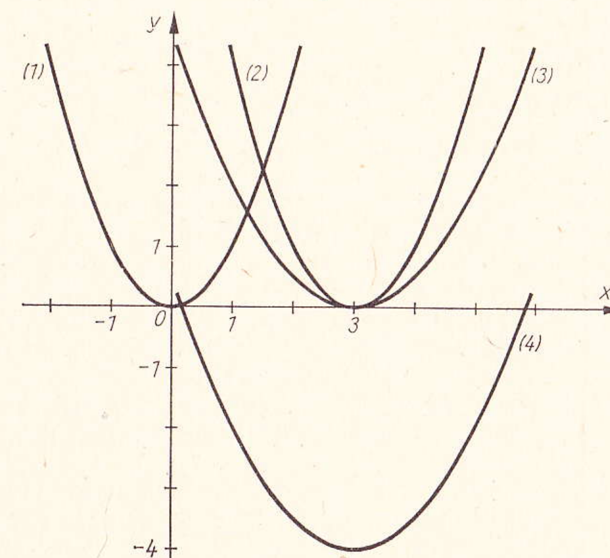


Abb. 31.5.

Wenn man alle drei betrachteten Möglichkeiten der Veränderung von Funktionsgleichungen

$$y = f(x) \rightarrow \begin{array}{l} y = a \cdot f(x) \\ y = f(x) + d \\ y = f(x - c) \end{array}$$

auf eine Gleichung $y = f(x)$ anwendet, so erhält man eine Gleichung der Form $y = g(x) = a \cdot f(x - c) + d$ bzw. $y - d = a \cdot f(x - c)$. Den Graph einer Funktion g mit einer solchen Gleichung erhält man aus dem Graph von f entsprechend der geometrischen Bedeutung der Konstanten $a, c, d \in R$. Dabei berücksichtigt man zuerst c, dann a und zuletzt d.

Beispiel:

Bestimmung des Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 4$

Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ (1)

$x \rightarrow x - 3$
Verschiebung um 3 Einheiten in positiver Richtung der x-Achse

Parabel mit der Gleichung $y = (x - 3)^2$ (2)

$(x - 3)^2 \rightarrow \frac{1}{2}(x - 3)^2$
Stauchung mit $a = \frac{1}{2}$ in Richtung der y-Achse

Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ (3)

$y \rightarrow y + 4$
Verschiebung um 4 Einheiten in negativer Richtung der y-Achse

Parabel mit der Gleichung
$y + 4 = \frac{1}{2}(x - 3)^2$
$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 4$ (4)

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie erhält man die Punkte $Q \in C(g)$ aus den Punkten $P \in C(f)$, wenn für die Funktion g folgende Gleichung gilt:
   1. $y = g(x) = f(x) + 2$
   2. $y = g(x) = f(x - 3)$
   3. $y = g(x) = f(x) - 2$
   4. $y = g(x) = f(x + 3)$
   5. $y = g(x) = \frac{1}{2}f(x)$
   6. $y = g(x) = -f(x)$
   7. $y = g(x) = -2f(x)$

2. Wie erhält man den Graph der Funktion aus dem Graph der Funktion f mit $y = f(x) = x^2$, wenn für g die folgende Gleichung gilt:
   1. $y = 2x^2$
   2. $y = -x^2$
   3. $y = (x - 1)^2$
   4. $y = -x^2 + 1$
   5. $y = -(x + 2)^2$
   6. $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 1$
   7. $y = (2 - x)^2$
   8. $y = 2(1 - x)^2 - 3$

3. Welche geometrische Bedeutung haben die Konstanten in Gleichungen der Form $y = a \cdot f(x - c) + d$?

Aufgaben

1. **hervorgehen aus**

   $y = (x - 1)^2$
   ► Die Gleichung $y = (x - 1)^2$ geht aus der Gleichung $y = x^2$ hervor.
   ► Der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = (x - 1)^2$ geht aus dem Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$ hervor.

   1. $y = (x + 1)^2$
   2. $y = \dfrac{2}{x - 1}$
   3. $y = -\dfrac{1}{2}(x - 3)^3$
   4. $y = \dfrac{1}{2(x + 1)^2}$
   5. $y = (1 - x)^2$
   6. $y = \dfrac{1}{1 - x}$
   7. $y = -(1 - x)^2 - 2$
   8. $y = \dfrac{1}{2}(x - 1)^3 + 4$

2. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen, deren Gleichungen in der Aufgabe 1 gegeben sind!

32. Funktionen und ihre inversen Funktionen

32.1. Begriff der inversen Funktion zu einer gegebenen Funktion

Eine Funktion $f = \{(x; y) \mid y = f(x); x \in D(f)\}$ ist eine eindeutige Abbildung.

Das bedeutet:

f ist eine Menge von geordneten Paaren $(x; y)$ mit der Eigenschaft, daß jedem $x \in D(f)$ genau ein $y \in W(f)$ zugeordnet ist.

Wenn man die Komponenten x und y in allen geordneten Paaren $(x; y) \in f$ vertauscht, erhält man eine neue Abbildung $\bar{f}$ (gelesen: f invers). Die Abbildung $\bar{f}$ ist dann eine Funktion, wenn sie eindeutig ist. Wir wollen untersuchen, unter welcher Voraussetzung für f die Abbildung $\bar{f}$ eine Funktion ist.

Dazu betrachten wir zwei Beispiele.

a) Gegeben sei die Funktion f mit

$$f = \{(x; y) \mid y = f(x) = 2x + 3;\ D(f) = [-4; +4]\};$$

Diese Funktion hat den Wertebereich $[-5; 11]$.
Zu der unendlichen Menge von geordneten Paaren, aus denen die Funktion f

besteht, gehören z. B. folgende geordnete Paare: $(-4; -5)$, $(-3; -3)$, $(-0{,}5; +2)$, $(1{,}5; 6)$. Wenn man in diesen geordneten Paaren die Elemente vertauscht, so erhält man folgende geordnete Paare: $(-5; -4)$, $(-3; -3)$, $(+2; -0{,}5)$, $(6; 1{,}5)$.
Aus den geordneten Paaren $(x; y) \in f$ gehen die geordneten Paare $(y; x) \in \bar{f}$ hervor. Die Abbildung $\bar{f}$ kann in der Form

$$\bar{f} = \{(y; x) \mid y = 2x + 3 \wedge y \in [-5; 11] = D(\bar{f}) \wedge x \in [-4; +4] = W(\bar{f})\}$$

geschrieben werden. Weil zu jedem Wert $y \in [-5; 11]$ genau ein Element $x \in [-4; +4]$ mit Hilfe der Gleichung $y = 2x + 3$ bestimmt werden kann, ist diese Abbildung eindeutig. Daher ist $\bar{f}$ eine Funktion.

b) Gegeben sei die Funktion $f = \{(x; y) \mid y = f(x) = x^2 - 5 \wedge D(f) = [-3; 5]\}$.
Weil $x^2 \geqq 0$ ist, erhält man den kleinsten Funktionswert, wenn $x = 0$ ist. $f(0) = -5$. Den größten Funktionswert erhält man für $x = +5$. $f(5) = 20$. Der Wertebereich von f ist demnach $W(f) = [-5; 20]$. Zu der Funktion f gehören z. B. folgende geordnete Paare: $(-2; -1)$, $(-1; -4)$, $(0; -5)$, $(+1; -4)$, $(+2; -1)$. Wenn man die Komponenten dieser geordneten Paare vertauscht, so erhält man die geordneten Paare: $(-1; -2)$, $(-4; -1)$, $(-5; 0)$, $(-4; +1)$, $(-1; +2)$. Auch in diesem Fall gehen aus den geordneten Paaren $(x; y) \in f$ die geordneten Paare $(y; x) \in \bar{f}$ hervor.
Die Abbildung $\bar{f}$ kann geschrieben werden:

$$\bar{f} = \{(y; x) \mid y = x^2 - 5 \wedge y \in [-5; 20] \wedge x \in [-3; 5]\}.$$

Diese Abbildung $\bar{f}$ ist aber nicht eindeutig, also keine Funktion; denn z. B. sind dem Element $-1 \in D(\bar{f})$ die Elemente $-2 \in W(\bar{f})$ und $+2 \in W(\bar{f})$ zugeordnet.
Aus den Beispielen erkennt man, daß die Abbildung $\bar{f}$, die man durch Vertauschen der Komponenten jedes geordneten Paares von f erhält, nicht in jedem Fall wieder eine Funktion ist. $\bar{f}$ ist genau dann eine Funktion, wenn die Funktion f mit $(x; y) \in f$ eineindeutig ist, d. h., wenn jedem $x \in D(f)$ genau ein $y \in W(f)$ und wenn jedem $y \in W(f)$ genau ein $x \in D(f)$ zugeordnet wird. Die Funktion $\bar{f}$ heißt die Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu f.
Wir können das Ergebnis unserer Betrachtungen in folgendem Satz zusammenfassen:

■ Es gibt zu einer Funktion f eine inverse Funktion $\bar{f}$ genau dann, wenn die Funktion f eineindeutig ist.

Für die Umkehrfunktion $\bar{f}$ zur Funktion f gilt also folgende Definition:

▶ **Def.:** $\bar{f}$ ist die Umkehrfunktion (inverse Funktion) zur eineindeutigen Funktion f mit $(x; y) \in f$ genau dann, wenn $\bar{f}$ die Menge der geordneten Paare $(y; x)$ ist.

Eine Funktion f, die eineindeutig ist, nennt man umkehrbar.
In der graphischen Darstellung kommt die Eineindeutigkeit einer stetigen Funktion dadurch zum Ausdruck, daß jede Parallele zur x-Achse mit dem Graph der Funktion höchstens einen gemeinsamen Punkt haben kann, daß die Funktion also streng monoton wächst oder streng monoton fällt.

■ *Satz:* Eine stetige Funktion ist eineindeutig genau dann, wenn sie streng monoton wächst oder fällt.

■ *Folgerung:* Eine stetige Funktion ist in einem Intervall $[a; b]$ eineindeutig genau dann, wenn sie in $[a; b]$ streng monoton wächst oder fällt.

Für den Definitions- und Wertebereich einer Funktion f und der zugehörigen inversen Funktion $\bar{f}$ gilt die Beziehung:

$D(f) = W(\bar{f})$
$W(f) = D(\bar{f})$.

32.2. Bestimmung von Gleichung und Graph einer inversen Funktion zu einer gegebenen Funktion

Wir wissen, daß die inverse Funktion $\bar{f}$ zu einer gegebenen eineindeutigen Funktion f aus der Menge der geordneten Paare besteht, die man erhält, wenn man die Komponenten aller geordneten Paare von f vertauscht. Für die Bestimmung von Gleichung und Graph von $\bar{f}$ sind daher zwei Fragen zu beantworten:

1. Welchen analytischen Ausdruck für $\bar{f}$ erhält man, wenn der für f gegeben ist?

2. Wie kann der Graph von $\bar{f}$ mit Hilfe des Graphen von f gefunden werden?

Zu 1.:

Die inverse Funktion $\bar{f}$ zur Funktion $f = \{(x; y) \mid y = f(x)\}$ ist die Funktion $\bar{f} = \{(y; x) \mid y = f(x)\}$. Die Funktionsgleichung von f beschreibt auch die Umkehrfunktion, aber y ist in $\bar{f}$ die unabhängige und x die abhängige Variable. Um zu einem Wert y den zugeordneten Wert x des Wertepaares $(y; x) \in \bar{f}$ zu berechnen, ist es zweckmäßig, die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x aufzulösen. Man schreibt $x = \bar{f}(y)$. Bei dieser Darstellung der Funktionsgleichung von $\bar{f}$ stört, daß die unabhängige Variable mit y und die abhängige Variable mit x bezeichnet werden. Man nimmt deshalb eine Umbenennung der Variablen vor, so daß man wieder die unabhängige Variable mit x und die abhängige Variable mit y bezeichnet.

▶ **Def.:** $\bar{f} = \{(x; y) \mid y = \bar{f}(x) \wedge x \in D(\bar{f})\}$

Wenn f mit $y = f(x)$ eine eineindeutige Funktion ist, so bildet man die Funktionsgleichung der inversen Funktion entsprechend folgender Handlungsanweisung:

1. Lösen Sie $y = f(x)$ nach x auf!
2. Vertauschen Sie die Bezeichnung der Variablen!

Beispiel:

Bestimmen Sie Funktionsgleichung, Definitions- und Wertebereich der inversen Funktion $\bar{f}$ zur Funktion f mit

$y = f(x) = 2x + 3$ und $D(f) = [-4; +4]$, $W(f) = [-5; 11]$!

Weil die lineare Funktion f mit $y = 2x + 3$ streng monoton wachsend ist, ist sie umkehrbar.

1. $y = f(x) = 2x + 3$ nach x auflösen: $x = \bar{f}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$.

2. Umbenennung der Variablen: $y = \bar{f}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

$D(\bar{f}) = [-5; 11]$, $W(\bar{f}) = [-4; 4]$.

Zu 2.:

■ *Satz:* Die Graphen der Funktionen f mit $y = f(x)$ und der inversen Funktion $\bar{f}$ mit $y = \bar{f}(x)$ liegen axialsymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $y = x$.

Das kann man aus den folgenden Überlegungen erkennen. Nach der Definition der inversen Abbildung gibt es zu jedem geordneten Paar $(a; b) \in f$ ein geordnetes Paar $(b; a) \in \bar{f}$.
Bei der graphischen Darstellung dieser geordneten Paare in einem kartesischen Koordinatensystem liegen die Punkte $P(a; b)$ und $\bar{P}(b; a)$ axialsymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $y = x$, die die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten ist.
Anhand der Zeichnung erkennt man:

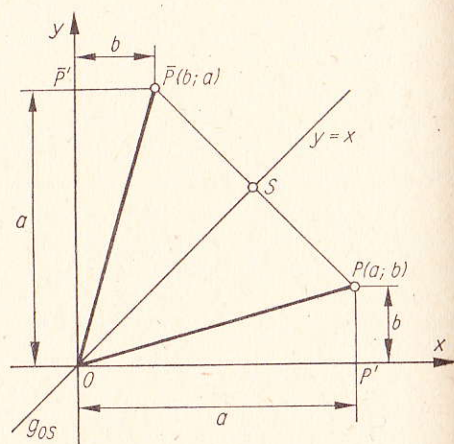


Abb. 32.1. Konstruktion des Graphen einer inversen Funktion

$\overline{OP} \cong \overline{O\bar{P}}$; wegen $OP'P \cong O\bar{P}\bar{P}'$

$\sphericalangle \bar{P}'O\bar{P} \cong \sphericalangle P'OP$; wegen $\bar{P}'O\bar{P} \cong P'OP$

$\sphericalangle SO\bar{P} \cong \sphericalangle SOP$; wegen $\sphericalangle_g SO\bar{P} = 45° - \sphericalangle_g \bar{P}'O\bar{P}$
und $\sphericalangle_g SOP = 45° - \sphericalangle_g P'OP$

g_{os} ist Winkelhalbierende von $\sphericalangle\ PO\bar{P}$ und damit Symmetrieachse zu P und $\bar{P}$.

Beispiele:

(1) Zu der linearen Funktion f mit $y = f(x) = 2x$ werden die inverse Funktion $\bar{f}$ und der Graph von $\bar{f}$ gesucht.

Gegeben: $f = \{(x; y) \mid y = 2x \wedge D(f) = R \wedge W(f) = R\}$

Gesucht: $\bar{f}$ mit $y = \bar{f}(x)$ und $D(\bar{f})$, $W(\bar{f})$ sowie der Graph von $\bar{f}$.

Die gegebene Funktion ist eine lineare Funktion. Sie ist in R eineindeutig und damit umkehrbar.
1. $y = f(x) = 2x$ nach x auflösen: $x = \bar{f}(y) = \frac{1}{2}y$
2. Die Variablen umbenennen: $y = \bar{f}(x) = \frac{1}{2}x$, deshalb
$\bar{f} = \{(x; y) \mid y = \frac{1}{2}x \wedge D(\bar{f}) = R \wedge W(\bar{f}) = R\}$.

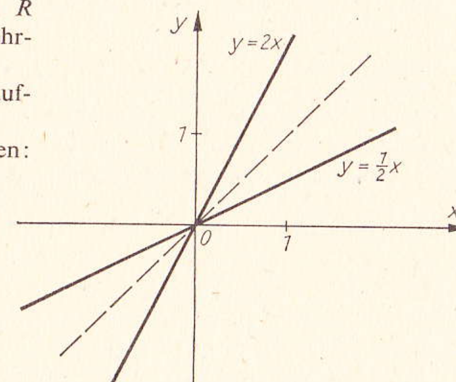


Abb. 32.2.

(2) Bilden Sie zur Funktion f mit $y = f(x) = x - 1$ und $D(f) = [1; +\infty)$, $W(f) = [0; +\infty)$ die Umkehrfunktion $\bar{f}$, und zeichnen Sie den Graph von $\bar{f}$!
Die Funktion f ist eine lineare Funktion und damit im gegebenen Definitionsbereich umkehrbar.

1. $y = f(x) = x - 1$ nach x auflösen: $x = \bar{f}(y) = y + 1$
2. Umbenennung der Variablen: $y = \bar{f}(x) = x + 1$
Der Definitionsbereich von f wird zum Wertebereich von $\bar{f}$ und umgekehrt, deshalb folgt:
$\bar{f} = \{(x; y) \mid y = x + 1 \wedge D(\bar{f}) = [0; +\infty) \wedge W(\bar{f}) = [1; +\infty).\}$

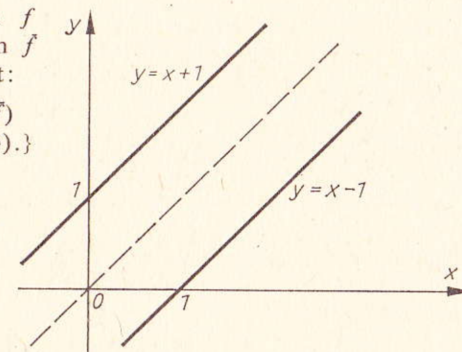


Abb. 32.3.

Die konstanten Funktionen f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = b$ $(b \in R)$ sind nicht eineindeutig und deshalb nicht umkehrbar.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie erhält man zu einer Funktion f mit $(x; y) \in f$ die Abbildung $\bar{f}$?
2. Ist die Abbildung $\bar{f}$ immer eine Funktion, wenn f eine Funktion ist? Begründen Sie die Antwort!
3. Unter welcher Bedingung für f ist die Abbildung $\bar{f}$ eine Funktion?
4. Was bedeutet: „Die Funktion ist eineindeutig"?
5. Wie ist die Umkehrfunktion $\bar{f}$ zur eineindeutigen Funktion f definiert?
6. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Definitionsbereichen und den Wertebereichen einer Funktion f und der Umkehrfunktion $\bar{f}$?
7. Unter welcher Bedingung ist eine stetige Funktion f in einem Intervall $[a; b]$ eineindeutig?
8. Wie bildet man zur eineindeutigen Funktion f mit $y = f(x)$ die inverse Funktion $\bar{f}$ mit $y = \bar{f}(x)$?
9. Was wissen Sie über die Graphen der Funktionen f mit $y = f(x)$ und $\bar{f}$ mit $y = \bar{f}(x)$?
10. Warum sind die konstanten Funktionen f mit $y = f(x) = b$ nicht umkehrbar?
11. Stellen Sie in einem Mengendiagramm die Mengen der Abbildungen, der Funktionen und der eineindeutigen Funktionen dar!

Aufgaben

1. inverse Funktion sein zu

lineare Funktion mit $y = 2x$

► Die lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2} \cdot x$ ist die inverse Funktion zur linearen Funktion mit der Funktionsgleichung $y = 2x$.

lineare Funktion mit $y = \frac{1}{4} \cdot x$, $y = \frac{3}{2} \cdot x$, $y = -\frac{1}{2} \cdot x$,

$y = 5x - 10$, $y = \frac{5}{6} \cdot x + 10$

2. Umkehrfunktion sein zu

(Beispiele s. Übung 1.)

► Die lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2} \cdot x$ ist die Umkehrfunktion zur linearen Funktion mit der Funktionsgleichung $y = 2x$.

3. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der inversen Funktionen zu folgenden linearen Funktionen!

$f_1\colon y = 5x + 4$ $\qquad$ $f_4\colon y = -x + 1$

$f_2\colon y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$ $\qquad$ $f_5\colon y = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{3}{4}$

$f_3\colon y = x + 3$ $\qquad$ $f_6\colon y = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{8}$

4. Stellen Sie die Funktionen f_1 und $\bar{f}_1$, f_2 und $\bar{f}_2$, ..., f_6 und $\bar{f}_6$ im Koordinatensystem graphisch dar!

5. Geben Sie alle linearen Funktionen f an, für die gilt: $f = \bar{f}$!

33. Wurzelfunktionen

Alle Funktionen f mit der Gleichung $y = f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ sind Wurzelfunktionen. So ist z. B. f mit $y = \sqrt{x - 1}$ und $D(f) = [1; +\infty)$ eine Wurzelfunktion. Die Wurzelfunktionen gehören zu den nichtrationalen Funktionen. Wir beschränken uns hier auf einige Typen von Wurzelfunktionen.

Dazu gehören:

Wurzelfunktionen, die zu Potenzfunktionen mit $y = x^n$ $(n \in N, n \geqq 2)$ invers sind.

Wurzelfunktionen mit der Gleichung $y = \sqrt{ax + b}$; $a, b \in R$, $a \neq 0$.

33.1. Wurzelfunktionen als inverse Funktionen zu Potenzfunktionen

Wir gehen von folgendem Satz aus:

■ Genau dann, wenn eine Funktion f eine eineindeutige Funktion ist, so existiert zu f eine inverse Funktion $\bar{f}$.

Untersucht man entsprechend diesem Satz die Potenzfunktionen f mit $y = f(x) = x^{2k}$ $(k \in N, k > 0, D(f) = (-\infty; +\infty))$, so stellt man fest: Diese Funktionen sind nicht eineindeutig. Man kann aber statt f eineindeutige Teilfunktionen f_1 und f_2 betrachten:

$$f_1\colon y = f_1(x) = x^{2k} \quad \text{mit} \quad D(f_1) = [0; +\infty) \quad \text{und} \quad W(f_1) = [0; +\infty)$$
$$f_2\colon y = f_2(x) = x^{2k} \quad \text{mit} \quad D(f_2) = (-\infty; 0) \quad \text{und} \quad W(f_2) = (0; +\infty)$$

Zu jeder dieser Funktionen f_1 und f_2 läßt sich eine inverse Funktion bestimmen.

Beispiel:

Gegeben ist f mit $y = f(x) = x^2$ und $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

f setzt sich zusammen aus den beiden eineindeutigen Teilfunktionen

$$f_1\colon y = x^2 \quad \text{mit} \quad D(f_1) = [0; +\infty) \quad \text{und} \quad W(f_1) = [0; +\infty)$$
$$f_2\colon y = x^2 \quad \text{mit} \quad D(f_2) = (-\infty; 0) \quad \text{und} \quad W(f_2) = (0; +\infty).$$

Für f_1 erhält man die Gleichung der Umkehrfunktion in folgenden Schritten:

1. $y = x^2$ nach x auflösen: $x^2 = y$

$$|x| = \sqrt{y}$$
$$x = \sqrt{y} \text{ wegen } x \in [0; +\infty).$$

2. Umbenennung der Variablen: $y = \sqrt{x}$, also

$f_1: y = f_1(x) = \sqrt{x}$ mit $D(f_1) = [0; +\infty)$ und $W(f_1) = [0; +\infty)$.
Entsprechend erhält man die Gleichung für f_2:

$f_2: y = f_2(x) = -\sqrt{x}$ mit $D(f_2) = (0; +\infty)$ und $W(f_2) = (-\infty; 0)$.

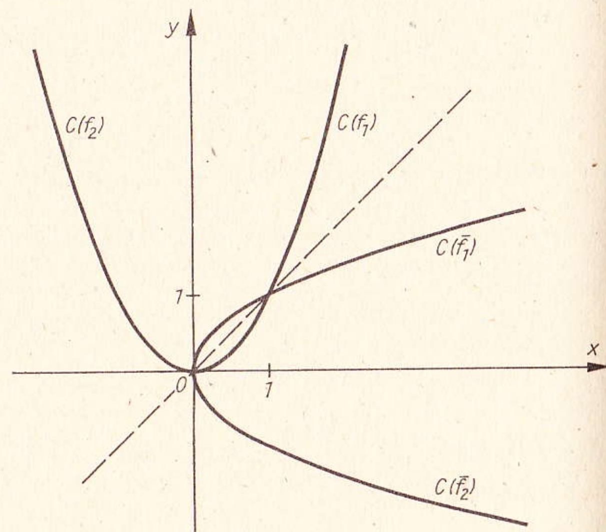


Abb. 33.1.

$f_1: y = f_1(x) = x^2, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$ und
$\bar{f}_1: y = \bar{f}_1(x) = \sqrt{x}, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$
$f_2: y = f_2(x) = x^2, \quad x < 0, \quad y > 0$ und
$\bar{f}_2: y = \bar{f}_2(x) = -\sqrt{x}, \quad x > 0, \quad y < 0$

33.2. Wurzelfunktionen mit der Funktionsgleichung $y = \sqrt[n]{x}$

Wir wollen die Wurzelfunktionen $f = \{(x; y) \mid y = \sqrt[n]{x}; D(f) = [0; +\infty)\}$ betrachten. Die Wurzelfunktionen mit der Funktionsgleichung $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$ und $n \geqq 2$, haben folgende Eigenschaften:

Größtmöglicher Definitionsbereich $D(f) = [0; +\infty)$ und Wertebereich $W(f) = [0; +\infty)$.
An der Stelle $x = 0$ haben die Funktionen eine Nullstelle. Sie sind im gesamten Definitionsbereich stetig.
Sie sind im Intervall $[0; +\infty)$ streng monoton wachsend.
$\forall n \in N \wedge n > 1$ gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
Die Graphen der Funktionen gehen alle durch den Punkt $P(1; 1)$.

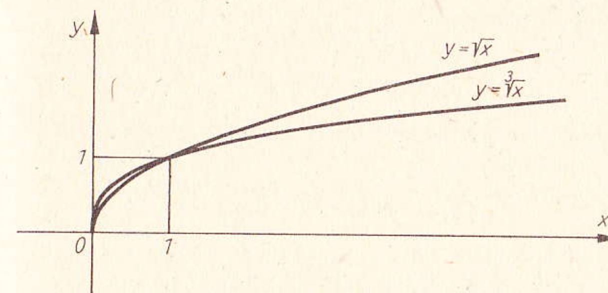


Abb. 33.2. Graphen der Wurzelfunktionen mit $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$

33.3 Wurzelfunktionen mit der Funktionsgleichung $y = \sqrt{ax + b}$; $a, b \in R \wedge a > 0$

Der Definitionsbereich einer solchen Wurzelfunktion ergibt sich aus der Bedingung, daß in R der Radikand einer Wurzel größer oder gleich Null sein muß, d. h. $ax + b \geqq 0$. Für den Definitionsbereich und den Wertebereich erhält man deshalb $D(f) = \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ und $W(f) = [0; +\infty)$. Die Nullstelle befindet sich an der Stelle $x_0 = -\frac{b}{a}$. Das Monotonieverhalten entspricht dem der Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = \sqrt[n]{x}$. Die Graphen der Funktionen mit $y = \sqrt{ax + b}$ sind gegenüber den Graphen der Funktionen mit $y = \sqrt[n]{x}$ in Richtung der x-Achse um $-\frac{b}{a}$ verschoben. Sie gehen im allgemeinen nicht durch den Punkt $P(1; 1)$.

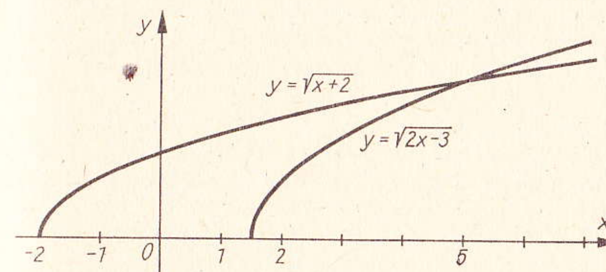


Abb. 33.3. Graphen der Wurzelfunktionen mit $y = \sqrt{x + 2}$ und $y = \sqrt{2x - 3}$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Warum ist die Funktion f mit $y = f(x) = x^2$ im Intervall $(-\infty; +\infty)$ nicht umkehrbar?
2. In welchen Teilintervallen läßt sich die Funktion f mit $y = f(x) = x^2$ umkehren?
3. Für welche x ist die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \sqrt{x}$ definiert?
4. Durch welchen Punkt gehen alle Graphen der Funktion f mit $y = \sqrt[n]{x}$?
5. Welche Bedingung gilt für die Bestimmung des Definitionsbereichs der Wurzelfunktion mit der Funktionsgleichung $y = \sqrt{ax + b}$?
6. Welche Eigenschaften haben die Graphen der Funktionen mit der Gleichung $y = \sqrt{ax + b}$ im Vergleich zum Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \sqrt{x}$?

Aufgaben

1. Geben Sie Intervalle an, in denen die Funktionen eineindeutig sind!

1. $y = 7x - 3$
2. $y = x^2 - 12x + 32$
3. $y = |x|$

2. Gegeben sind die folgenden Funktionsgleichungen $y = f(x)$:

1. $y = x^2 - 5$
2. $y = 2x^2 + 4$
3. $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{2}$
4. $y = 4x^3 - 12$

Geben Sie ein Intervall an, in dem die Funktionen umkehrbar sind!
Bilden Sie die inversen Funktionen $\bar{f}$ mit $y = \bar{f}(x)$!
Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der inversen Funktionen $\bar{f}$!

3. Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die Nullstellen, den größtmöglichen Definitionsbereich und den Wertebereich! Skizzieren Sie den Graph der Funktionen!

1. $y = f(x) = \sqrt{x - 3}$
2. $y = f(x) = 2\sqrt{x + 4}$
3. $y = f(x) = -\sqrt{3x - 6}$
4. $y = f(x) = \sqrt[3]{2x + 8}$
5. $y = f(x) = \sqrt[3]{7x - 14}$
6. $y = f(x) = \sqrt{1 - x}$
7. $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
8. $y = f(x) = \sqrt{-x^2 + 1}$
9. $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

4. Erläutern Sie, was man beachten muß, wenn man zu der Funktion f mit $y = f(x) = x^2 + 1$ die inverse Funktion $\bar{f}$ mit $y = \bar{f}(x)$ bilden will! Führen Sie die Umkehrung durch!

5. Vergleichen Sie die beiden Funktionen mit den Funktionsgleichungen
$y = \sqrt{x - 1}$ und $y = \sqrt{-x + 1}$,
$y = \sqrt{x^2 - 4}$ und $y = \sqrt{-x^2 + 4}$
bezüglich ihres größtmöglichen Definitionsbereiches, ihres Wertebereiches und ihres Graphen!

34. Exponential- und Logarithmusfunktionen

34.1. Exponentialfunktionen

■ Die Exponentialfunktionen sind ein weiteres Beispiel für nichtrationale Funktionen. Sie lassen sich in der Form

$f = \{(x; y) \mid y = f(x) = a^x \wedge a \in R^+ \setminus \{1\}\}$

darstellen.

Weil die Exponentialfunktionen für alle $x \in R$ definiert sein sollen, muß die Basis a positiv sein. Bei negativer Basis gäbe es unendlich viele reelle x, für die keine reellen Funktionswerte existieren, z. B. $(-2)^{\frac{3}{4}} \notin R$. Wir wählen auch $a \neq 1$, weil sich für die Basis $a = 1$ die konstante Funktion $y = 1^x = 1$ ergibt, die schon behandelt wurde. Wir betrachten nur Exponentialfunktionen mit $a > 1$. Die Exponentialfunktionen mit der Basis $a > 1$ haben folgende Eigenschaften:

größtmöglicher Definitionsbereich $D(f) = R$

Die Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen.

Wegen $y_0 = f(0) = a^0 = 1$ schneiden die Graphen der Exponentialfunktionen die y-Achse im Punkt $P(0; 1)$.

Die Exponentialfunktionen sind im gesamten Definitionsbereich stetig. Es gibt keine Unstetigkeitsstellen.

Die Exponentialfunktionen mit $a > 1$ sind im $D(f)$ streng monoton wachsend.

Es gilt: $\lim_{x \to \infty} a^x = +\infty$.

Es gilt: $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.

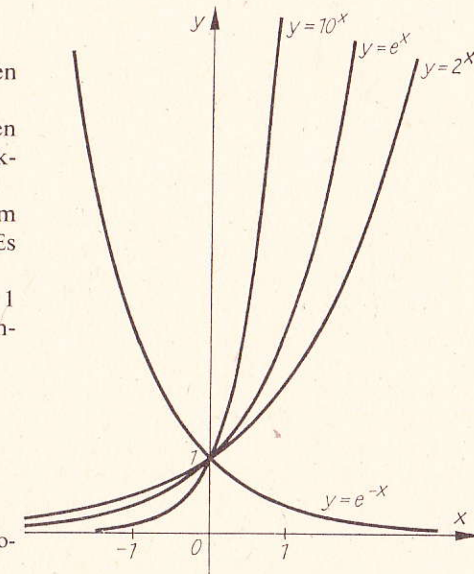


Abb. 34.1. Graphen verschiedener Exponentialfunktionen

Das bedeutet, daß sich der Graph einer Exponentialfunktion mit $a > 1$ bei abnehmendem x immer mehr dem negativen Teil der x-Achse nähert. Die x-Achse ist Asymptote für die Graphen der Exponentialfunktionen.

Den Graph einer Exponentialfunktion mit der Funktionsgleichung $y = a^{-x}$ erhält man, wenn man den Graph der Funktion mit $y = a^x$ an der y-Achse spiegelt.

Anmerkung:
Nicht nur für Exponentialfunktionen, sondern für beliebige Funktionen gilt: Den Graph zu einer Funktion mit $y = f(-x)$ erhält man, wenn man den Graph der Funktion mit $y = f(x)$ an der y-Achse spiegelt.
Der große Anwendungsbereich der Exponentialfunktion beruht auf folgender Eigenschaft:

■ Wenn in $y = c \cdot a^x$ $(a > 0 \wedge a \neq 1)$ das Argument x eine arithmetische Folge durchläuft, so durchlaufen die Funktionswerte y eine geometrische Folge.

Wir wollen diesen Satz beweisen:

Voraussetzung:
(1) $(x) = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ ist eine arithmetische Folge mit der konstanten Differenz $x_{k+1} - x_k = d$ $(k \in N)$
(2) $(y) = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ mit
$y_k = c \cdot a^{x_k}$ und $y_{k+1} = c \cdot a^{x_{k+1}}$ $(a > 0 \wedge a \neq 1)$

Behauptung:
Die Folge $(y) = y_0, y_1, y_2, \ldots$ ist eine geometrische Folge, so daß nach Definition der Quotient zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder gleich einer Konstanten $q \neq 0$ ist: $\frac{y_{k+1}}{y_k} = q$.

Beweis:

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{c \cdot a^{x_{k+1}}}{c \cdot a^{x_k}} = a^{x_{k+1} - x_k} = a^d = \text{konst.}$$ w. z. b. w.

Folgerung:
■ Es gilt: $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = y_k \cdot a^d - y_k = y_k(a^d - 1)$, da $a^d - 1$ konstant ist, folgt: $\Delta y_k \sim y_k$.

Wenn y eine physikalische oder andere Größe bezeichnet, so bezeichnet Δy die Veränderung dieser Größe. Stetig verlaufende Vorgänge in Natur und Technik, bei denen die Veränderung einer Größe proportional dieser Größe ist, können durch Exponentialfunktionen beschrieben werden.
Setzt man $a = e^k$ $(k \in R^+)$, so erhält man statt $y = c \cdot a^x$ die Funktionsgleichung $y = c \cdot e^{kx}$ bzw. $y = c \cdot e^{-kx}$ mit $k > 0$. Dabei beschreiben $y = c \cdot e^{kx}$ die Zunahme und $y = c \cdot e^{-kx}$ die Abnahme einer Größe y (bei wachsendem x). Funktionsgleichungen der Form $y = c \cdot e^{kx}$ und $y = c \cdot e^{-kx}$ für Exponentialfunktionen wendet man für die mathematische Beschreibung von exponentiell verlaufenden Vorgängen in Natur, Technik und Gesellschaft an.
Ein Beispiel für die Anwendung der Exponentialfunktionen ist das organische Wachstum. So ist z. B. der Zuwachs an Bakterien einer Bakterienkultur in der Zeitdifferenz $\Delta t = t_1 - t_0$ der Anzahl der Bakterien zur Zeit t_0 direkt proportional. Voraussetzung dabei ist, daß das Wachstum nicht durch bestimmte Substanzen gehemmt wird. Sind z. B. zum Zeitpunkt t_1 dreimal soviele Bakterien vorhanden wie zum Zeitpunkt t_0, so erwartet man in jedem weiteren gleich großen Zeitintervall Δt wieder eine Verdreifachung der zu Beginn dieses Zeitintervalls Δt vorhandenen Bakterienzahl. Die Anzahl $N = f(t)$ der Bakterien errechnet sich deshalb nach der Gleichung $N = N_0 e^{kt}$ mit $N_0 > 0$ und $k > 0$. N_0 ist die Zahl der Bakterien zur Zeit $t = 0$ und k die Wachstumskonstante. Aus $N = N_0 e^{kt}$ kann man auch die Zeit t_D berechnen, in der sich die Zahl der Bakterien verdoppelt hat. Es ist dann $N = 2N_0$, also $2N_0 = N_0 e^{kt_D}$ oder $2 = e^{kt_D}$. Löst man diese Gleichung nach t_D auf, so folgt $t_D = \frac{\ln 2}{k}$. Auch andere Wachstumsprozesse wie z. B. die Zunahme des Holzbestandes eines Waldes oder auch die Zunahme der menschlichen Bevölkerung können unter vereinfachenden Annahmen durch Exponentialfunktionen beschrieben werden.

Ein anderes Beispiel für die Anwendung der Exponentialfunktionen ist der radioaktive Zerfall.
Auch bei dieser Erscheinung ist die Anzahl N der radioaktiven Atome zur Zeit t der Anzahl N_0 der radioaktiven Atome zur Zeit $t_0 = 0$ proportional. Für den radioaktiven Zerfall gilt daher das Gesetz: $N = N_0 e^{-\lambda t}$.
Da immer $N < N_0$ ist, muß die Funktion streng monoton fallen, also der Exponent negativ sein. λ ist die Zerfallskonstante, die für eine bestimmte Substanz charakteristisch ist. Eine andere wichtige Konstante ist die Halbwertszeit T_H, die der Zerfallskonstanten eindeutig zugeordnet ist. T_H ist die Zeit, in der die Hälfte aller Atomkerne der Substanz zerfallen ist. Für $t = T_H$ ist $N = \frac{N_0}{2}$, also $\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_H}$. Man erhält dann für $T_H = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-\lambda} = \frac{\ln 1 - \ln 2}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Aufgabe:
Berechnen Sie die Halbwertszeit von Radium (Ra), wenn die Zerfallskonstante $\lambda = 1{,}382 \cdot 10^{-11}\,\text{s}^{-1}$ ist!

$$T_H = \frac{\ln 2}{1{,}382 \cdot 10^{-11}\,\text{s}^{-1}} = \frac{0{,}6931}{1{,}382} \cdot 10^{11}\,\text{s}$$
$$= \frac{0{,}6931 \cdot 10^{11}}{1{,}382 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 365}\,\text{Jahre}$$
$$= \underline{\underline{1\,590\ \text{Jahre}}}$$

34.2. Logarithmusfunktionen

Die Logarithmusfunktionen

$$f = \{(x; y) \mid y = f(x) = \log_a x;\ a \in R^+ \setminus \{1\}\}$$

sind die Umkehrfunktionen zu den Exponentialfunktionen mit Gleichungen der Form $y = f(x) = a^x$. Der Graph einer Logarithmusfunktion mit $y = \log_a x$ und der Graph einer Exponentialfunktion mit $y = a^x$ liegen symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $y = x$.

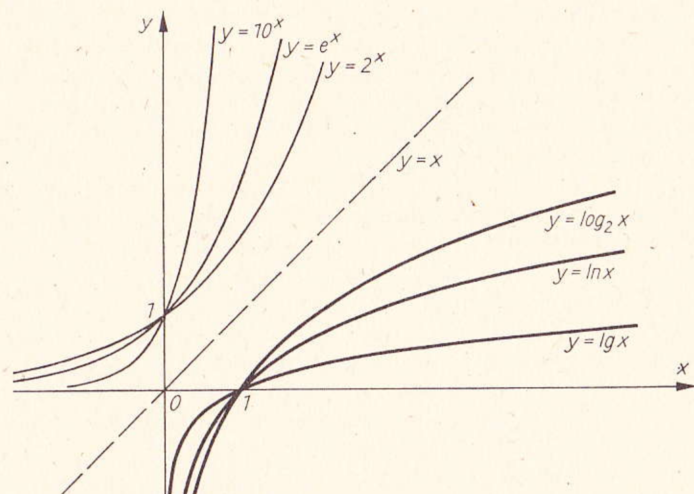


Abb. 34.2. Graphen verschiedener Logarithmusfunktionen

Die Eigenschaften der Logarithmusfunktionen mit der Basis $a > 1$ ergeben sich aus denen der Exponentialfunktionen mit $a > 1$:

größtmöglicher Definitionsbereich $D(f) = R^+$, $W(f) = R$

An der Stelle $x_0 = 1$ befindet sich für alle Logarithmusfunktionen eine Nullstelle. Es gibt keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Die Logarithmusfunktionen sind für alle $x \in D(f)$ stetig.
Sie sind streng monoton wachsend.

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty .$$

An der Stelle $x_1 = 0$ sind die Logarithmusfunktionen nicht definiert. Auch für $x < 0$ existieren im Reellen keine Logarithmen $\log_a x$.

Analog zu den Exponentialfunktionen sind die Logarithmusfunktionen mit der Basis e wichtig für die Naturwissenschaften und für die Technik. Logarithmen mit der Basis e nennt man natürliche Logarithmen und schreibt $\log_e x = \ln x$.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Warum muß bei der Exponentialfunktion f mit $y = f(x) = a^x$ die Basis a positiv sein?
2. Wieviel Nullstellen hat eine Exponentialfunktion?
3. Was bedeutet $\Delta y_k \sim y_k$?
4. Welche Funktionen erfüllen die Bedingung $\Delta y_k \sim y_k$?
5. Warum ist die negative x-Achse für den Graph von $y = a^x$, $a > 1$, Asymptote?

6. Wie erhält man den Graph einer Funktion mit $y = f(-x)$ aus dem Graph der Funktion mit $y = f(x)$?
7. Wie erhält man den Graph der Exponentialfunktion mit der Funktionsgleichung $y = 2^{-x}$ aus dem Graph der Exponentialfunktion mit der Funktionsgleichung $y = 2^x$?
8. Auf welcher Eigenschaft beruht der große Anwendungsbereich der Exponentialfunktionen?
9. Welche Formen von Funktionsgleichungen für Exponentialfunktionen wendet man bei der mathematischen Beschreibung von exponentiell verlaufenden Vorgängen an?
10. Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Logarithmusfunktion mit der Gleichung $y = \log_a x$ $(a > 0 \wedge a \neq 1)$ an!
11. In welchem Intervall sind die Logarithmusfunktionen nicht definiert?
12. Wie nennt man Logarithmen mit der Basis e?

Aufgaben

1. streng monoton wachsend (fallend) sein

Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = a^x$ mit $a > 1$ ist ...

► Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = a^x$ mit $a > 1$ ist streng monoton wachsend.

Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \log_a x$ mit $a > 1$ ist ...
Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = e^x$ ist ...
Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = e^{-x}$ ist ...

2. Umkehrfunktion sein zu

Logarithmusfunktionen

► Die Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen zu den Exponentialfunktionen.

Exponentialfunktionen
Logarithmusfunktion mit der Funktionsgleichung $y = \lg x$
Exponentialfunktion mit der Funktionsgleichung $y = e^x$
Exponentialfunktion mit der Funktionsgleichung $y = 2^x$
Logarithmusfunktion mit der Funktionsgleichung $y = 2 \log_a x$

3. inverse Funktion sein zu

(Verwenden Sie die Übungen aus 2.!)

4. Beweisen Sie, daß die Logarithmusfunktion mit $y = \log_a x$ die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion mit $y = a^x$ ist!

5. Vergleichen Sie die Graphen der Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y = \log_a x$, $y = \log_a x^2$, $y = 2 \cdot \log_a x$ und $y = 2 \cdot \log_a |x|$!

6. Vergleichen Sie die Graphen der Funktionen mit den Gleichungen $y = \lg x$ und $y = \lg (a \cdot x)$, $a \in R^+$!

7. Vergleichen Sie die Graphen der Funktionen mit den Gleichungen $y = e^x$ und $y = e^{-x}$!

8. Bilden Sie die inversen Funktionen zu den Funktionen mit den Gleichungen

$y = e^x$ $\qquad y = c \cdot e^{-x}$ $\qquad y = 10^x$

$y = c \cdot e^x$ $\qquad y = 2^{\frac{3}{x}}$

9. Bestimmen Sie die größtmöglichen Definitions- und Wertebereiche, Nullstellen und Monotonie der Funktionen mit den Gleichungen $y = 2^x$ und $y = 2^{-x}$! Vergleichen Sie die Graphen beider Funktionen!

10. Untersuchen Sie die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ an der Stelle $x_0 = 0$!
(Hinweis: Man nennt diese Unstetigkeit einen Sprung.)

11. Das organische Wachstum kann durch Exponentialfunktionen mit Funktionsgleichungen der Form $N = N_0\, e^{kt}$ dargestellt werden.

1. Warum ist das möglich?
2. Welche Bedeutung hat dabei N_0?
3. Bestimmen Sie Definitionsbereich und Wertebereich einer Exponentialfunktion mit $N = N_0\, e^{kt}$!

12. Was für Wachstumsprozesse können durch Exponentialfunktionen beschrieben werden?

13. Warum kann man den radioaktiven Zerfall einer Substanz mit Hilfe einer Exponentialfunktion darstellen? Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich von $N = N_0\, e^{-\lambda t}$!
Welche physikalische Bedeutung haben Definitions- und Wertebereich der Funktion mit $N = N_0\, e^{-\lambda t}$?

14. Wieviel Prozent einer bestimmten Anfangsmenge N_0 von Radium (Ra) mit $\lambda = 1{,}382 \cdot 10^{-11}\ s^{-1}$ sind nach 3000 Jahren (1 Jahr $\approx 3{,}15 \cdot 10^7$ s) noch vorhanden?

15. Für die Abkühlung eines Körpers, der sich in einer kälteren Umgebung befindet, gab Newton folgende Gleichung an:

$$T = T_u + (T_0 - T_u)\, e^{-at}.$$

Dabei ist T die Temperatur des Körpers zur Zeit t, T_0 die Anfangstemperatur, T_u die Umgebungstemperatur und a eine Konstante, die vom Material und der Oberfläche des Körpers abhängt.
Bei einer Außentemperatur von 6 °C ist die Temperatur des Inhalts einer Thermosflasche in 6 Stunden von 93 °C auf 70 °C gesunken. Berechnen Sie die Temperatur nach 24 Stunden, und skizzieren Sie den Graph der Funktion!

16. Die Auflösung einer Substanz im Wasser wird durch eine Funktion mit der Gleichung $s = S(1 - e^{-\alpha t})$ beschrieben. Dabei ist s die zur Zeit t gelöste Menge, S die Sättigungsmenge und α eine für die Substanz charakteristische Konstante. Berechnen Sie S und α für Traubenzucker, wenn bei einem Versuch 20 g nach einer Minute und 35 g nach 2 Minuten gelöst wurden!

17. Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen!

1. $2^x = 7$
2. $2^x = 0{,}5$
3. $3^x = 10$
4. $10^{x-2} = 4{,}5$
5. $2{,}6 \cdot e^x = 358{,}8$
6. $\sqrt[4]{0{,}5} \cdot e^{0{,}5x} = 7$
7. $e^{2x} = -25$
8. $2^{3+x} = 2^{x-1}$
9. $5^{x^2-3x} = 5^x$
10. $e^{x+7} = e^{2x-1}$

18. Lesen Sie den Text, bevor Sie die Aufgaben lösen!

Graphen von Funktionen mit Gleichungen der Form y = *f(bx)*

Indem man in $y = f(x)$ die Variable x durch bx ersetzt, geht die Funktion f in eine Funktion mit der Gleichung $y = f(bx)$ über, wobei die Konstante b eine von Null verschiedene Zahl sein soll:

$$y = f(x) \longrightarrow y = f(bx); \quad b \in R; \quad b \neq 0$$

Beispiele:

$$y = e^x \xrightarrow{b=-1} y = f(-x)$$
$$y = g(x) = e^{-x}$$
$$y = e^x \xrightarrow{b=2} y = f(2x)$$
$$y = g(x) = e^{2x}$$

Vergleicht man die Funktionen f und g miteinander, so erkennt man:
An einer beliebigen Stelle $x_0 \in D(f)$ hat f den Funktionswert $f(x_0)$. Den gleichen Funktionswert $f(x_0)$ nimmt g an der Stelle $\frac{x_0}{b}$ an: $g\left(\frac{x_0}{b}\right) = f\left(b \cdot \frac{x_0}{b}\right) = f(x_0)$.
Man erhält also zu jedem Punkt $P(x_0; y_0) \in C(f)$ die Koordinaten eines Punktes $Q\left(\frac{x_0}{b}; y_0\right) \in C(g)$, indem man die Abszisse von P mit dem Faktor $k = \frac{1}{b}$ multipliziert und die Ordinate beibehält.

Beispiele:

a) $y = f(x) \xrightarrow{b=2} y = f(2x)$
$\quad = e^x \qquad y = g(x) = e^{2x}$

Stauchung von $C(f)$ mit dem Stauchungsfaktor $k = \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ in Richtung der x-Achse zur y-Achse hin.

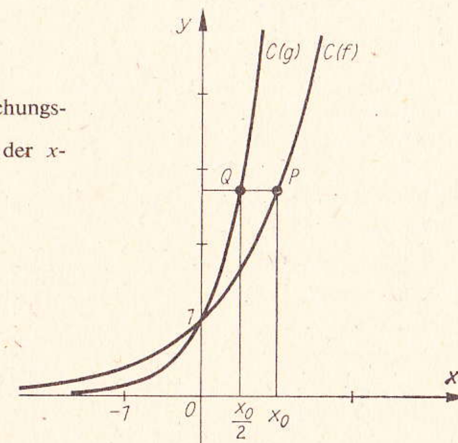


Abb. 34.3.

b) $y = f(x) \xrightarrow{b=-\frac{1}{2}} y = f(-\frac{1}{2}x)$
$= e^x \qquad y = e^{-\frac{1}{2}x}$

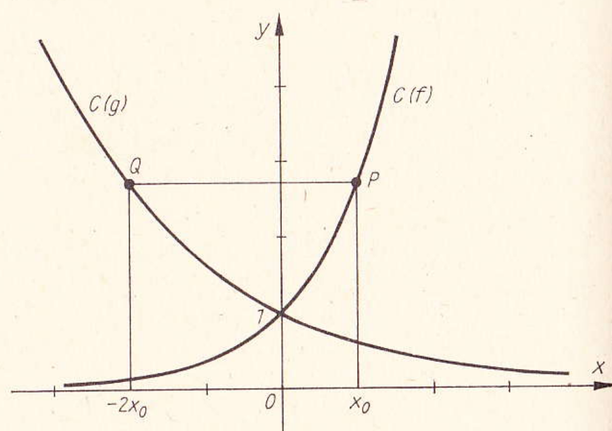


Abb. 34.4.

Spiegelung von $C(f)$ an der y-Achse und Streckung mit dem Streckungsfaktor $|k| = \frac{1}{|b|} = 2$ in Richtung der x-Achse von der y-Achse weg.

Zusammenfassung:
Man erhält den Graph einer Funktion g mit $y = g(x) = f(bx)$ aus dem Graph der Funktion $y = f(x)$
für $b < 0$ durch eine Spiegelung an der y-Achse,
für $|b| > 1$ durch eine Stauchung in Richtung der x-Achse zur y-Achse hin $\left(\text{Stauchungsfaktor } |k| = \frac{1}{|b|} < 1\right)$
für $|b| < 1$ durch eine Streckung in Richtung der x-Achse von der y-Achse weg $\left(\text{Streckungsfaktor } |k| = \frac{1}{|b|} > 1\right)$

1. Gegeben sind die Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y = e^x$; $y = e^{2x}$; $y = e^{0,5x}$ und $y = e^{0,1x}$.
(a) Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem die Graphen der Funktionen!
(b) Die Funktionsgleichungen haben die Form $y = e^{kx}$.
Wie groß ist k in den gegebenen Funktionsgleichungen?
(c) Welche Bedeutung hat die Konstante k in $y = e^{kx}$ für die Graphen der Funktionen?

2. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f, deren Gleichungen gegeben sind!
$y = f(x) = e^{-x}$
$y = f(x) = -e^x$
$y = f(x) = e^{0,5x}$
$y = f(x) = e^{x-1} - 2$
$y = f(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

3. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f, deren Gleichungen gegeben sind!
$y = f(x) = \ln(-x)$
$y = f(x) = \ln(x - 2)$
$y = f(x) = \ln(1 - x)$
$y = f(x) = 1 + \ln 2x$
$y = f(x) = -\ln(2x - 4)$

35. Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen sind Funktionen mit Gleichungen der Form

$y = \sin x$ („... Sinus x"),
$y = \cos x$ („... Kosinus x"),
$y = \tan x$ („... Tangens x") und
$y = \cot x$ („... Kotangens x").

Sie sind wie alle reellen Funktionen geordnete Paare reeller Zahlen. Für die Argumente x der Winkelfunktionen gilt auch $x \in R$. Wir verwenden für die Argumente das Bogenmaß. Die Definition des Bogenmaßes beruht auf der Überlegung, daß die Länge b eines Kreisbogens bei einem bestimmten Radius r der Größe des entsprechenden Zentriwinkels proportional ist:

$$b : 2\pi r = \alpha° : 360°, \quad b = \frac{\pi r}{180°} \cdot \alpha°.$$

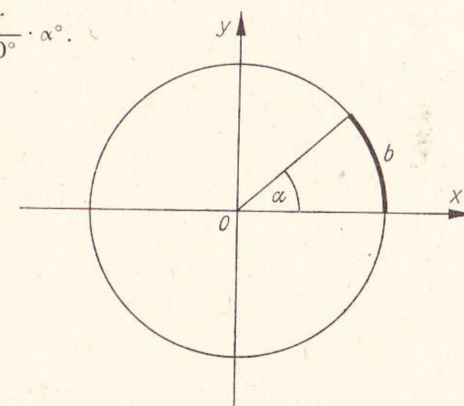


Abb. 35.1. Das Bogenmaß

Um vom Radius unabhängig zu sein, bildet man das Verhältnis Bogenlänge zu Radius, das ebenfalls der Zentriwinkelgröße proportional ist:

$$\frac{b}{r} = \text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha°.$$

Mit Hilfe dieser Umrechnungsformel kann man jedem Winkel eineindeutig eine reelle Zahl zuordnen.

Die Maßeinheit der Winkelgröße im Bogenmaß ist der Radiant (rad): 1 rad ≈ 57,3°.
Oft wird die Winkelgröße im Bogenmaß in Vielfachen von π angegeben, und die Maßeinheit wird nicht geschrieben, z. B. $90° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{2}$.

35.1. Definition der Winkelfunktionswerte

Die Winkelfunktionswerte kann man an einem Kreis k mit dem Radius r definieren. Im Mittelpunkt des Kreises liegt der Ursprung eines u-v-Koordinatensystems. Auf dem Kreis k befindet sich ein Punkt $P(u, v)$. $\overline{OP}$ bildet mit der u-Achse einen Winkel, x ist die Winkelgröße dieses Winkels im Bogenmaß und somit eine reelle Zahl.

$$\sin x =_{Df} \frac{v}{r}$$

$$\cos x =_{Df} \frac{u}{r}$$

$$\tan x =_{Df} \frac{v}{u}, \quad u \neq 0$$

$$\cot x =_{Df} \frac{u}{v}, \quad v \neq 0$$

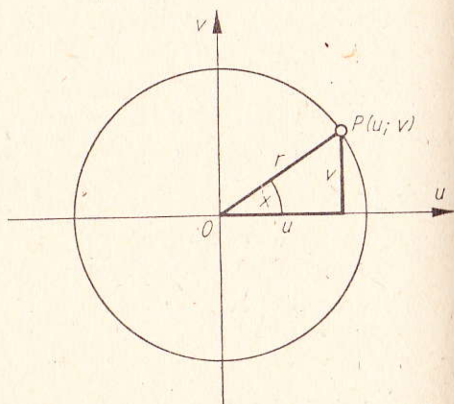


Abb. 35.2. Definition der Winkelfunktionswerte am Kreis

35.2. Definition und Eigenschaften von Winkelfunktionen

35.2.1. Die Sinusfunktion

► **Def.:** Die Sinusfunktion mit der Funktionsgleichung $y = \sin x$ ist die Menge aller geordneten Paare $(x; y)$ mit $x \in R$ und $y = \sin x = \frac{v}{r}$. (v ist die Ordinate des Punktes P auf dem Kreis k und r der Zahlenwert des Radius.)

$$f = \left\{(x; y) \mid y = \sin x, x \in R \wedge \sin x = \frac{v}{r}\right\}.$$

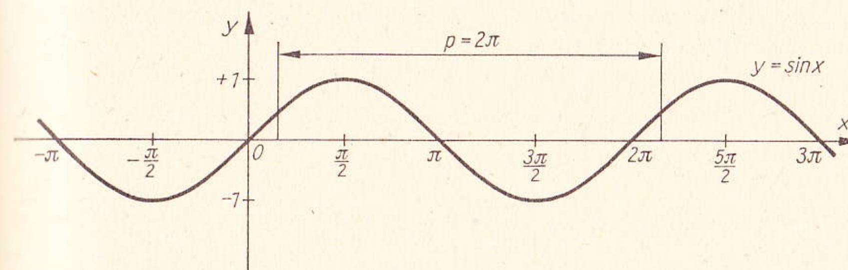


Abb. 35.3. Die Sinusfunktion

Aus der Definition ergeben sich folgende Eigenschaften für die Sinusfunktion:

$D(\sin) = R$, $W(\sin) = [-1; +1]$.

An den Stellen $x_k = k \cdot \pi$ mit $k \in G$ hat die Sinusfunktion Nullstellen.
Die Sinusfunktion ist für alle $x \in R$ stetig.

Sie ist in den Intervallen $\left[-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; +\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right]$ mit $k \in G$ streng monoton wachsend und in den Intervallen $\left[+\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right]$ streng monoton fallend. Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$ existiert nicht.

Die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion, denn es gilt $\sin(-x) = -\sin x$. Der Graph ist daher zentralsymmetrisch zum Ursprung.

Die Winkelfunktionen haben noch eine besondere Eigenschaft, sie sind periodisch.

Definition der Periodizität:

► **Def.:** Eine Funktion f heißt periodisch mit der Periode ω, wenn gilt:
a) $x \in D(f) \rightarrow (x + k \cdot \omega) \in D(f) \quad (k \in G)$
b) $\forall x \in D(f)\colon f(x + k \cdot \omega) = f(x)$.
Die kleinste Periode von f heißt „primitive Periode".

Es gilt $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$; denn die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion mit der primitiven Periode $\omega = 2\pi$.

Aus dem Verlauf des Graphen der Sinusfunktion erkennt man sehr leicht noch folgende Eigenschaften:

Die Sinusfunktion ist für alle Winkel $x \in (0; \pi)$ positiv und für alle Winkel $x \in (\pi; 2\pi)$ negativ. (Vorzeichenregel)

Da die Gerade $x = \frac{\pi}{2}$ eine Symmetrieachse des Graphen ist, erkennt man, daß $\sin(\pi - x) = \sin x$ gilt.

Weil der Punkt $P(\pi; 0)$ ein Symmetriezentrum des Graphen ist, erkennt man, daß noch folgende Relationen gelten:

$|\sin(\pi + x)| = |\sin(\pi - x)| = |\sin x|$ und
$|\sin(2\pi - x)| = |\sin x|$.

(Quadrantenrelationen)

35.2.2. Die Tangensfunktion

▶ **Def.:** Die Tangensfunktion mit der Funktionsgleichung $y = \tan x$ ist die Menge aller geordneten Paare $(x; \tan x)$ mit $\tan x = \frac{v}{u}$.
(v ist die Ordinate und u die Abszisse des Punktes P auf dem Kreis k.)

$$f = \left\{(x; y) \mid y = \tan x, x \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\} \wedge \tan x = \frac{v}{u}\right\}$$

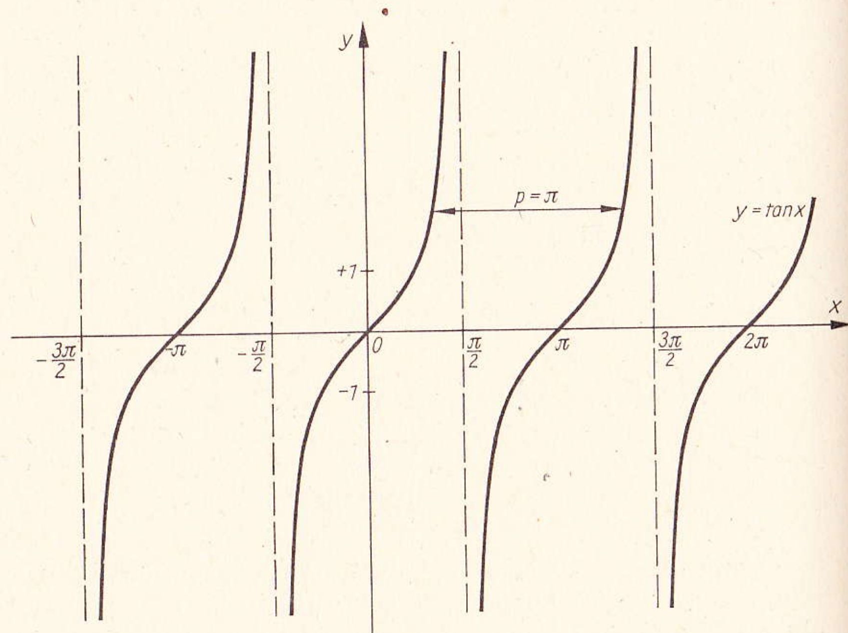


Abb. 35.4. Die Tangensfunktion

Aus der Definition folgen für die Tangensfunktion die Eigenschaften:

$D(\tan) = R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}, k \in G$ und $W(\tan) = R$.

An den Stellen $x_k = k \cdot \pi$ mit $k \in G$ befinden sich Nullstellen.

Die Tangensfunktion ist für alle $x \in D(\tan)$ stetig. An den Stellen $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in G$, ist die Tangensfunktion unstetig. An der Unstetigkeitsstelle $\frac{\pi}{2}$ gibt es folgende uneigentliche Grenzwerte:

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 0.$$

Die Gerade $x = \frac{\pi}{2}$ ist eine Asymptote. (Analoge Betrachtungen gelten auch für die anderen Unstetigkeitsstellen.)

In den Intervallen $\left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$ mit $k \in G$ ist die Tangensfunktion streng monoton wachsend.
Man sieht am Kreis, daß $\tan(-x) = \frac{-v}{u} = -\frac{v}{u} = -\tan x$ gilt. Deshalb ist die Tangensfunktion eine ungerade Funktion. Der Graph ist zentralsymmetrisch zum Ursprung.
Die Tangensfunktion ist periodisch und hat die primitive Periode $\omega = \pi$.

35.3. Beziehungen zwischen den Winkelfunktionswerten

Beziehungen zwischen verschiedenen Funktionswerten bei gleichem Argument

Aus den Definitionen am Kreis folgen die Beziehungen:

■ (1) $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in G$

(2) $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x; \quad x \neq k \cdot \pi, \quad k \in G$

(3) $\tan x \cdot \cot x = 1; \quad x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in G$

(4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Beziehungen zwischen Funktionswerten, deren Argumente Summe oder Differenz zweier Winkelgrößen sind, und den Funktionswerten dieser Winkelgrößen selbst (Additionstheoreme)

Die Sinus- und Kosinusfunktion erfüllen für $x_1, x_2 \in R$ folgende Additionstheoreme:

■ (5) $\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2$
(6) $\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2$

Daraus folgen z. B. die Relationen:

■ (7) $\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cdot \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cdot \cos \frac{x_1 + x_2}{2}$

(8) $\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \cdot \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cdot \sin \frac{x_1 + x_2}{2}$

Man kann sie bestätigen, indem man für x_1 den Term $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ und für x_2 den Term $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ schreibt und dann (5) und (6) anwendet.
Die Additionstheoreme für Tangens erhält man aus (1), (5) und (6) mit entsprechenden äquivalenten Umformungen:

(9) $\tan(x_1 + x_2) = \dfrac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \cdot \tan x_2}$

Ersetzt man in (9) x_2 durch $-x_2$, so ergibt sich

(10) $\tan(x_1 - x_2) = \dfrac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \cdot \tan x_2}$.

Mit den Additionstheoremen kann man auch Funktionswerte der Winkelfunktionen, deren Argumente Vielfache ($2x$; $3x$; ...) oder Teiler $\left(\frac{x}{2}; \frac{x}{3}; \ldots\right)$ eines Winkels x sind, äquivalent umformen, so daß die Argumente nur noch den Winkel x enthalten. So erhält man z. B. für $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Darstellung von Winkelfunktionswerten durch Funktionswerte anderer Winkelfunktionen bei gleichem Argument

Mit den Beziehungen (1) bis (4) ist es möglich, die Funktionswerte jeder Winkelfunktion durch die Funktionswerte jeder anderen Winkelfunktion auszudrücken. Will man z. B. $\sin x$ durch $\cos x$ ausdrücken, so erhält man aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ die Formel

$$\sin x = \begin{cases} \sqrt{1 - \cos^2 x} & \text{für } x \in [2k\pi; (2k+1)\pi] \\ -\sqrt{1 - \cos^2 x} & \text{für } x \in [(2k-1)\pi; 2k\pi] \end{cases}$$

35.4. Goniometrische Gleichungen

Man nennt Gleichungen der Form

$$T(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = 0,$$

wobei die f_k mit $k = 1, 2, \ldots, n$ Winkelfunktionen sind, goniometrische Gleichungen.
Beispiel:

$$f_1(x) = \cos 2x; \quad f_2(x) = \sin x$$
$$T(f_1(x), f_2(x)) = 3\cos 2x - 20 \sin x - 9$$

Schon die einfache Aufgabe, daß man zu einem Winkelfunktionswert den zugehörigen Winkel bestimmt, ist das Lösen einer goniometrischen Gleichung.
Beispiele:

$$\sin x = 0{,}5; \quad \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \tan x = \sqrt{3}.$$

Da die Winkelfunktionen periodische Funktionen sind, haben die goniometrischen Gleichungen unendlich viele Lösungen. Die Gleichung $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ hat im Intervall $[0; 2\pi]$ die Lösungen $x_1 = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$. Wegen der Periodizität der Sinusfunktion ergeben sich die Lösungen

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \text{und} \quad x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in G).$$

■ Für das Lösen goniometrischer Gleichungen sind folgende Schritte günstig:

1. Formen Sie die Terme $f_k(x)$ mit Hilfe der Additionstheoreme so um, daß Sie in allen Termen $f_k(x)$ das gleiche Argument erhalten!
2. Drücken Sie in T die verschiedenen Winkelfunktionen f_k durch genau eine Winkelfunktion f aus!
3. Substituieren Sie den Term $f(x)$ durch eine neue Variable, und lösen Sie die Gleichung!
4. Machen Sie die Substitution rückgängig, und bestimmen Sie die Winkelgrößen, die den Lösungen zugeordnet sind!
5. Prüfen Sie, ob die erhaltenen Winkel Lösungen der Ausgangsgleichung sind!

Beispiele:

(1) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ — Es gibt nur ein Argument x und einen Term $f(x) = \cos x$, deshalb müssen wir nur den 3. und 4. Schritt ausführen.

$z^2 = \frac{3}{4}$ — Substitution $z = \cos x$ (3. Schritt)

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ oder $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (4. Schritt)

$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ oder $x = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ oder

$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ oder $x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$, $k \in G$.

Das kann man zusammenfassen zu

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \quad \text{oder} \quad x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi.$$

Für die Lösungsmenge erhält man

$$L = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot \pi \text{ mit } k \in G\right\} \quad \text{bzw.}$$
$$L = \{x \mid x = 30° + k \cdot 180° \vee x = 150° + k \cdot 180° \text{ mit } k \in G\}.$$

(2) $\sin^2 x = \frac{3}{4} - \sin x$ Substitution $z = \sin x$ (3. Schritt)

$z^2 = \frac{3}{4} - z$

$z^2 + z - \frac{3}{4} = 0$

$z_1 = \frac{1}{2}$ oder $z_2 = -\frac{3}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ oder $\sin x = -\frac{3}{2}$ (4. Schritt)

$\sin x = -\frac{3}{2}$ ist nicht definiert.

$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ oder $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in G.$

$L = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \text{ mit } k \in G\right\}$

bzw.

$L = \{x \mid x = 30° + k \cdot 360° \vee x = 150° + k \cdot 360° \text{ mit } k \in G\}.$

(3) $2\cos^2 x + 3 \sin x = 3$ (2. Schritt)

$2(1 - \sin^2 x) + 3 \cdot \sin x = 3$

$2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x + 1 = 0$ (3. Schritt)

$2z^2 - 3z + 1 = 0$

$z_1 = 1; \quad z_2 = \frac{1}{2}$

$\sin x = 1$ oder $\sin x = \frac{1}{2}$ (4. Schritt)

$L = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi, k \in G\right\}$

bzw.

$L = \{x \mid x = 30° + k \cdot 360° \vee x = 90° + k \cdot 360° \vee x = 150° + k \cdot 360°, \quad k \in G\}.$

(4) $3 \cdot \cos 2x - 20 \cdot \sin x = 9$

$3(\cos^2 x - \sin^2 x) - 20 \cdot \sin x = 9$ (1. Schritt)

$3(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) - 20 \cdot \sin x = 9$ (2. Schritt)

$3 - 6 \cdot \sin^2 x - 20 \cdot \sin x = 9$

$3 \cdot \sin^2 x + 10 \cdot \sin x + 3 = 0$

$3 \cdot z^2 + 10 \cdot z + 3 = 0$ (3. Schritt)

$z_1 = -3; \quad z_2 = -\frac{1}{3}$

$\sin x = -3; \quad \sin x = -\frac{1}{3}$ (4. Schritt)

$\sin x = -3$ ist nicht definiert.

$L = \{x \mid x = 199{,}5° + k \cdot 360° \vee x = 340{,}5° + k \cdot 360°, k \in G\}$

bzw.

$L = \{x \mid x = 3{,}48 \text{ rad} + k \cdot 2\pi \vee x = 5{,}94 \text{ rad} + k \cdot 2\pi, k \in G\}.$

Eine goniometrische Gleichung der Form $x - \tan x = 0$ kann mit dieser Methode nicht gelöst werden.

35.5. Die Sinusfunktion mit der Funktionsgleichung $y = a \cdot \sin(bx + c)$

Viele Probleme der Physik und Technik (besonders der Elektrotechnik) lassen sich beschreiben durch die Sinusfunktion mit der Gleichung $y = a \cdot \sin(bx + c)$ ($a > 0$, $b > 0$ und $a, b, c \in R$). Den **Faktor a** nennt man Amplitude, er bewirkt, daß die Funktionswerte mit a multipliziert werden. Der Wertebereich ist das Intervall $[-a; a]$. Der **Faktor b** verändert die Periode der Funktion. Während die Sinusfunktion mit der Gleichung $y = \sin x$ die Periode 2π hat, hat die Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot \sin(bx + c)$ die Periode $\frac{2\pi}{b}$. Das bedeutet: $a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin\left(b\left[x + \frac{2\pi}{b}\right] + c\right)$ für alle $x \in R$. Die Wahrheit dieser Aussage erkennt man aus folgender Umformung:

$$a \cdot \sin\left(b\left[x + \frac{2\pi}{b}\right] + c\right) = a \cdot \sin(bx + 2\pi + c)$$
$$= a \cdot \sin(bx + c + 2\pi)$$
$$= a \cdot \sin(bx + c).$$

Die **Konstante c** bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion.

$a \cdot \sin(bx + c)$ wird 0, wenn $bx + c = 0$ ist; d. h., wenn $x = -\frac{c}{b}$ ist.

Man nennt $-\frac{c}{b}$ den Phasenwinkel, die Phasenverschiebung. Der Graph von $y = a \cdot \sin(bx + c)$ ist um $-\frac{c}{b}$ in Richtung der x-Achse verschoben.

Beispiele:

(1) $y = f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ hat die Amplitude A, die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ und die Phasenverschiebung $-\frac{\alpha}{\omega}$.

(2) Die Funktion mit der Gleichung $y = 1{,}5 \cdot \sin\left(\frac{4}{5} \cdot x + \frac{2}{5}\pi\right)$ hat den Wertebereich $[-1{,}5; +1{,}5]$. Die Periode ist $\frac{5}{2}\pi$. Die Phasenverschiebung beträgt $-\frac{\pi}{2}$.

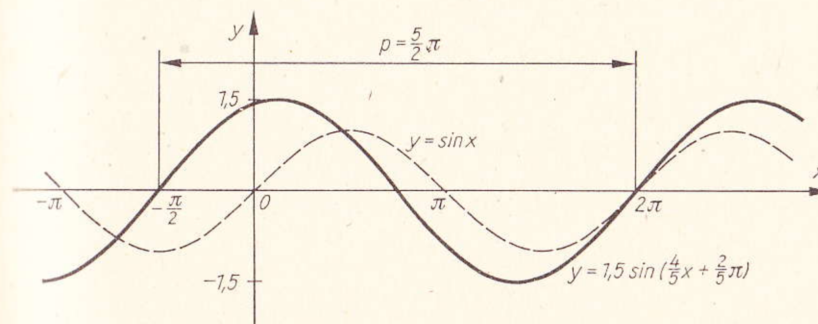


Abb. 35.5 Beispiel für die Sinusfunktion mit der Funktionsgleichung $y = a \cdot \sin(bx + c)$

35.6. Sinus- und Kosinussatz

Eine breite Anwendung haben die Winkelfunktionen in den Naturwissenschaften, der Technik, der Landesvermessung, der Schiffahrt und der Luftfahrt gefunden. Bei diesen Anwendungen treten immer wieder Dreiecke auf, die nicht rechtwinklig sind. Für diese Dreiecke wurden deshalb Beziehungen zwischen den Seitenlängen a, b, c und den Innenwinkelgrößen α, β, γ aufgestellt. Die wichtigsten sind der

■ Sinussatz

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

■ und der Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Wenn die Größen von drei unabhängigen Stücken eines Dreiecks gegeben sind, so können die Größen der fehlenden Stücke des Dreiecks berechnet werden. Bei Anwendung des Sinussatzes muß beachtet werden, daß bei der Berechnung einer Winkelgröße das Ergebnis nicht eindeutig ist.

35.7. Umkehrfunktionen zu den Winkelfunktionen

Die zyklometrischen Funktionen sind die inversen Funktionen zu den Winkelfunktionen. Voraussetzung für die Existenz einer inversen Funktion $\bar{f}$ ist, daß die Funktion f eineindeutig ist. Diese Voraussetzung ist aber bei den Winkelfunktionen nicht erfüllt. Deshalb bildet man die Umkehrfunktionen nur in den Intervallen des Definitionsbereiches, in denen die Funktionen eineindeutig sind.

Die Sinusfunktion ist z. B. im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend. Für dieses Intervall existiert eine Umkehrfunktion, die Arcussinusfunktion heißt. Zur Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \sin x, \quad D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{und} \quad W(f) = [-1; +1]$$

gehört die Umkehrfunktion $\bar{f}$ mit der Funktionsgleichung

$$y = \bar{f}(x) = \operatorname{Arc\,sin} x, \quad D(\bar{f}) = [-1; +1] \quad \text{und} \quad W(\bar{f}) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

(gelesen: „... Arcus sinus x")
Bei der Arcussinusfunktion wird die Winkelgröße y gesucht, wenn der Sinuswert x gegeben ist.
Allgemein gilt: Bei den Arcusfunktionen wird die Winkelgröße zu einem gegebenen Winkelfunktionswert gesucht. Die Monotonieintervalle, in denen die Arcusfunktionen als inverse Funktionen zu den Winkelfunktionen definiert werden, sind

für $y = \cos x$ das Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$,

für $y = \tan x$ das Intervall $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$ und

für $y = \cot x$ das Intervall $0 < x < \pi$.

Zu den Funktionen

$$y = \cos x \quad x \in [0; \pi]; \quad y \in [-1; +1]$$
$$y = \tan x \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right); \quad y \in (-\infty; +\infty)$$
$$y = \cot x \quad x \in (0; \pi); \quad y \in (-\infty; +\infty)$$

gehören also die Umkehrfunktionen

■
$$y = \operatorname{Arc\,cos} x \quad x \in [-1; +1]; \quad y \in [0; \pi]$$
$$y = \operatorname{Arc\,tan} x \quad x \in (-\infty; +\infty); \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y = \operatorname{Arc\,cot} x \quad x \in (-\infty; +\infty); \quad y \in (0; \pi).$$

Die Funktionsbilder der Winkelfunktionen und die der zyklometrischen Funktionen liegen axialsymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $y = x$. Die genannten Wertebereiche geben die „Hauptwerte" der zyklometrischen Funktionen an.

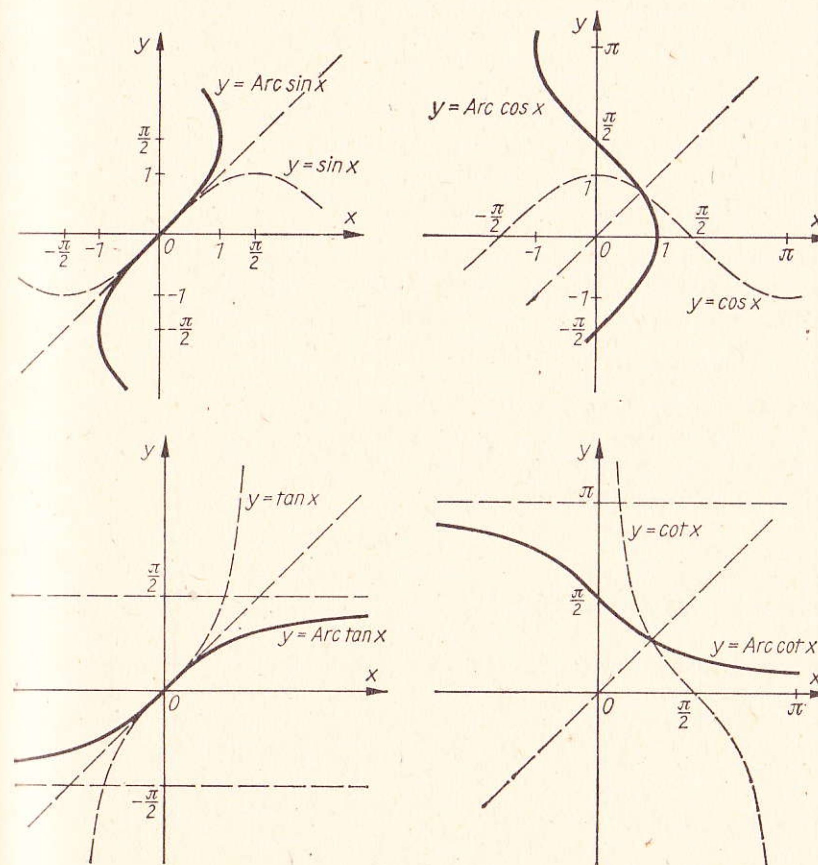


Abb. 35.6. Graphen der Umkehrfunktionen zu den Winkelfunktionen

Da die Sinusfunktion mit $y = \sin x$ z. B. auch im Intervall $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ eineindeutig ist, könnte man auch für dieses Intervall die inverse Funktion bilden. Solche Intervalle gibt es unendlich viele.
Für den gesamten Definitionsbereich $(-\infty; \infty)$ ist die inverse Abbildung der Sinusfunktion unendlich-vieldeutig und somit keine Funktion.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Nennen Sie die vier Winkelfunktionen!
2. Wie ist das Bogenmaß definiert?
3. In welcher Einheit wird das Bogenmaß gemessen?
4. Was versteht man unter einer periodischen Funktion?
5. Wie ist die Sinusfunktion definiert?
6. An welchen Stellen hat die Sinusfunktion Nullstellen?
7. Was können Sie über den Graph der Sinusfunktion sagen? (Die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion.)
8. Wieviel Symmetrieachsen und -zentren hat die Sinusfunktion?
9. Welche primitive Periode hat die Sinusfunktion?
10. Wie ist die Tangensfunktion definiert?
11. An welchen Stellen ist die Tangensfunktion unstetig?
12. Welcher Unterschied besteht zwischen $\sin x$ und der Sinusfunktion?
13. Wie bestimmt man die Phasenverschiebung der Sinusfunktion mit der Funktionsgleichung $y = a \cdot \sin(bx + c)$?
14. Welche primitive Periode hat die Funktion mit der Gleichung $y = \frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$?
15. Wo wendet man den Sinus- und Kosinussatz an?
16. Warum ist die Sinusfunktion nicht umkehrbar?
17. Warum kann im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ die Umkehrfunktion zur Funktion mit $y = \cos x$ gebildet werden?

Aufgaben

1. einen Funktionswert annehmen

f mit $y = f(x) = 2x - 1 \,/\, x_0 = 0$

► Die Funktion f mit $y = 2x - 1$ nimmt an der Stelle $x_0 = 0$ den Funktionswert $y_0 = -1$ an.

► Die Funktion f mit $y = 2x - 1$ nimmt für $x_0 = 0$ den Funktionswert $y_0 = -1$ an.

f mit $y = f(x) = \sin x \,/\, x_0 = \frac{\pi}{6}$

f mit $y = f(x) = \tan x \,/\, x_0 = \frac{\pi}{4}$

f mit $y = f(x) = \cos x \,/\, x_k = k \cdot 2\pi$ mit $k \in G$

f mit $y = f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \,/\, x_0 = \frac{5}{8}\pi$

2. Definieren Sie die Kosinus- und Kotangensfunktion!

3. Bestimmen Sie für die Kosinus- und Kotangensfunktion die folgenden Eigenschaften:
Größtmöglichen Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Stetigkeit, Monotonie, Periodizität und ob die Funktionen gerade oder ungerade sind!

4. Berechnen Sie die Funktionswerte der Winkelfunktionen für die Winkel 0°, 30°, 45°, 60° und 90° mit Hilfe eines gleichseitigen bzw. rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks!

5. Für welche Werte von x sind die folgenden Ausdrücke nicht definiert?

1. $\frac{1}{\cos x}$	3. $\frac{1}{\sin^2 x}$	5. $\sqrt{\tan x}$
2. $\sqrt{\sin x}$	4. $\frac{1}{\cot x}$	6. $\frac{\sin x}{x}$

6. Lösen Sie folgende Aufgaben mit Hilfe der Proportion $\operatorname{arc}\alpha : \alpha^0 = \pi : 180°$ (Rechenstab) bzw. mit der Zahlentafel!
   1. Rechnen Sie die folgenden Winkelgrößen in das Bogenmaß um!
   $\alpha_1 = 12°$; $\alpha_2 = 43{,}2°$; $\alpha_3 = 73{,}8°$; $\alpha_4 = 128°$
   2. Rechnen Sie die folgenden Winkelgrößen in das Gradmaß um!
   $\operatorname{arc}\alpha_1 = 0{,}5$ rad; $\operatorname{arc}\alpha_2 = 0{,}03$ rad;
   $\operatorname{arc}\alpha_3 = 2{,}5$ rad; $\operatorname{arc}\alpha_4 = 5{,}70$ rad

7. Bestimmen Sie die Funktionswerte mit Hilfe der Tafel!

sin 30°	sin 3000°
sin 100°	sin (−400°)
sin 200°	sin (−280°)
sin 300°	sin (−160°)

8. Bestimmen Sie die Winkelgrößen mit Hilfe der Tafel!
($x \in [0°; 360°]$)

$\sin x = 0{,}5$	$\sin x = -0{,}4$
$\sin x = 0{,}35$	$\sin x = -0{,}1122$
$\sin x = 0{,}8$	$\sin x = -0{,}5678$

9. Bestimmen Sie die Funktionswerte mit Hilfe der Tafel!

sin 40°	tan 1000°	cos π
tan 100°	cot (−20°)	cos (−1)
cot 200°	cos (−150°)	tan $\frac{\pi}{4}$
cos 300°	tan (−320°)	cot (+3,21)

10. Bestimmen Sie die Winkelgrößen mit Hilfe der Tafel!
$(x \in [0;\, 2\pi])$
$\sin x = 0{,}6$
$\tan x = 0{,}6$
$\cot x = -0{,}6$
$\cos x = -0{,}6$
$\tan x = 3{,}5$
$\tan x = -4{,}66$
$\cos x = 0{,}74$
$\cot x = -7{,}4$

11. Lösen Sie folgende Aufgaben!

1. Beweisen Sie die Beziehung $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$
a) am spitzwinkligen Dreieck,
b) am stumpfwinkligen Dreieck!
2. Begründen Sie, warum die Berechnung eines Winkels mit dem Sinussatz nicht eindeutig ist!

12. Von Dreiecken sind gegeben:
1. $a = 8{,}66$ cm; $b = 6{,}00$ cm; $\gamma = 25°$
2. $b = 10{,}5$ cm; $\alpha = 72{,}3°$; $\gamma = 32{,}5°$
3. Hypotenusenlänge $c = 6{,}45$ cm; $\alpha = 37{,}4°$
(rechtwinkliges Dreieck)
Berechnen Sie die Größen der fehlenden Stücke sowie den Flächeninhalt A der Dreiecke!

13. Von einem gleichschenkligen Dreieck ABC sind der Umfang $u = 16$ cm und die Höhe $h_c = 4$ cm bekannt. Wie lang sind seine Schenkel $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ und die Basis $\overline{AB}$?
Berechnen Sie außerdem den Flächeninhalt A!

14. Ein Quadrat und ein regelmäßiges Sechseck sollen flächeninhaltsgleich sein. Wie groß ist für diesen Fall die Seitenlänge b des Sechsecks, wenn die Seitenlänge des Quadrats mit $a = 10$ cm gegeben ist?

15. Stellen Sie eine Formel auf, mit der man den Flächeninhalt A eines regelmäßigen Sechsecks mit Hilfe des Umfangs u berechnen kann!

16. Die Wechselspannungen I, II, III eines Drehstromgenerators unterscheiden sich in ihren Phasen um $120° = \dfrac{2\pi}{3}$. Die Gleichungen für die Spannungen sind $u_{\text{I}} = U \cdot \sin \omega t$, $u_{\text{II}} = U \cdot \sin\left(\omega t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $u_{\text{III}} = U \cdot \sin\left(\omega t + \dfrac{4\pi}{3}\right)$.
Beweisen Sie, daß $u_{\text{I}} + u_{\text{II}} + u_{\text{III}} = 0$ für jedes t ist!

17. Bestimmen Sie die primitive Periode und die Phasenverschiebung!

1. $y = 1{,}5 \cdot \sin 2x$
2. $y = 0{,}3 \cdot \sin \dfrac{x}{3}$
3. $y = -2 \cdot \cos \dfrac{3}{2}x$
4. $y = 2{,}5 \cdot \sin\left(4x - \dfrac{2}{3}\pi\right)$
5. $y = 0{,}5 \cdot \tan\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$
6. $y = 1{,}2 \cdot \tan\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

18. Skizzieren Sie die Bilder folgender Funktionen! Geben Sie Amplitude, primitive Periode und Phasenverschiebung an!

1. $y = 2 \cdot \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
2. $y = 0{,}5 \cdot \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
3. $y = 1{,}5 \cdot \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

19. Bestimmen Sie für die folgenden goniometrischen Gleichungen die Lösungsmengen!

1. $\sin x - \sqrt{3}\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sqrt{3} = 0$
2. $\sin x \cdot (2 - \sin x) = \dfrac{1}{2}$
3. $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos x$
4. $\sin x \cdot \cos x = 0{,}25$
5. $\cos 2x - \cos x + 2 = 0$
6. $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \dfrac{1}{2}$

20. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

1. Arc sin 1
2. Arc sin 0
3. Arc cos 0
4. Arc cos $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
5. Arc tan 1
6. Arc cot 0
7. Arc sin 0,56
8. Arc tan (−2,19)

Differentialrechnung

36. Der Differentialquotient

36.1. Historisches

Zu den wesentlichsten Ergebnissen der Entwicklung der Mathematik im 17. Jahrhundert gehört die Ausarbeitung der Grundlagen der Differential- und Integralrechnung durch den englischen Naturforscher I. Newton (1643–1727) und den deutschen Gelehrten G. W. Leibniz (1646–1716). Die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung gelang diesen beiden Wissenschaftlern unabhängig voneinander und fast gleichzeitig. Eine „Doppelentdeckung" wie diese erfolgt im allgemeinen dann, wenn das gesellschaftliche Bedürfnis für diese Entdeckung vorliegt und wenn durch vorangegangene wissenschaftliche Arbeiten die Voraussetzungen gegeben sind, die zu einem Umschlagen gewonnener und gesammelter Erkenntnisse in eine neue Qualität führen.
So haben viele Mathematiker und Naturwissenschaftler die Erkenntnisse erarbeitet, von denen Leibniz und Newton bei der Entwicklung von Methoden der Differential- und Integralrechnung ausgingen. Die Entstehung der Differential- und Integralrechnung im 17. Jahrhundert und ihre weitere Entwicklung im 18. und 19. Jahrhundert sind in engem Zusammenhang mit der gesellschaftlichen Entwicklung dieser Zeit zu sehen. Die ökonomisch erstarkende Bourgeoisie förderte die Entwicklung der Mathematik und Naturwissenschaften, weil von ihrer bewußten Anwendung der technische Fortschritt und damit die Entwicklung und Festigung der bürgerlichen Gesellschaftsordnung abhingen.
Der dialektische Zusammenhang zwischen der gesellschaftlichen Entwicklung und der Wissenschaftsentwicklung zeigt sich auch in Veränderungen der gesellschaftlichen Stellung des Wissenschaftlers. „Während Bruno im Jahre 1600 verbrannt wurde, Galilei in der Haft der Inquisition starb und Descartes noch emigrieren mußte, wurde Newton geadelt und erhielt 1727 als Naturwissenschaftler ein Staatsbegräbnis" (Aus „Biographien bedeutender Mathematiker", Berlin: Volk und Wissen 1975).
Das gesellschaftliche Interesse an der Wissenschaftsentwicklung kommt auch darin zum Ausdruck, daß im 17. Jahrhundert eine Reihe von Akademien bzw. wissenschaftliche Gesellschaften gegründet wurden, die neue Formen der wissenschaftlichen Zusammenarbeit ermöglichten. Newton und Leibniz waren an den Veränderungen in der Wissenschaftsentwicklung aktiv beteiligt. So wurde auf Initiative von Leibniz im Jahre 1700 in Berlin eine wissenschaftliche Gesellschaft gegründet, aus der 1711 die Akademie der Wissenschaften hervorging. Leibniz war ihr erster Präsident. Newton war von 1703 bis zu seinem Tode Präsident der 1662 gegründeten Royal Society.
Die Differentialrechnung baut auf dem Begriff des Differentialquotienten auf.

Bei der Ausarbeitung dieses Begriffs gingen Newton und Leibniz von verschiedenen Problemstellungen aus. Newton war vor allem Physiker, und die Entwicklung der Physik im 17. Jahrhundert erforderte die Berechnung von Bewegungen wie z. B. die der Planeten, des freien Falls und von gegeneinander beweglichen Maschinenteilen. Mit seinen mathematischen Arbeiten schuf er dafür die Grundlagen.
Leibniz beschäftigte sich mit der Aufgabe, den Anstieg einer Kurventangente zu bestimmen, und er kam dabei ebenfalls wie Newton zum Begriff des Differentialquotienten.

36.2. Differentialquotient und Kurventangente

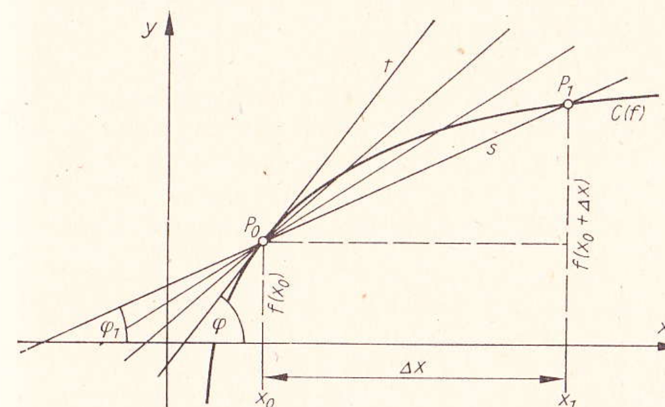


Abb. 36.1. Anstieg einer Kurventangente

Leibniz wollte also den Anstieg $\tan\varphi$ einer Kurventangente an den Graph der Funktion f im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ bestimmen, wobei φ die Größe des Winkels zwischen der positiven Richtung der x-Achse und der Tangente ist. Legt man auf dem Graph mit der Gleichung $y = f(x)$ noch einen Punkt $P_1(x_1; y_1)$ fest, so läßt sich durch P_0 und P_1 eine Sekante legen, die den Anstieg

$$m_s = \tan\varphi_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

hat. Bei diesem Quotienten sind Zähler und Nenner Differenzen. Der Anstieg der Sekante ist also ein Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Läßt man bei festem P_0 den Punkt P_1 auf der Funktionskurve gegen den Punkt P_0 laufen, so nähern sich die Sekanten durch die Punkte P_0 und P_1 immer mehr der Tangente durch P_0. Dabei werden die Abszissendifferenzen $\Delta x = x_1 - x_0$ immer kleiner, aber es bleibt $\Delta x \neq 0$, so lange $P_0 \neq P_1$ ist. Für jede dieser Sekanten ist der Anstieg

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Die Anstiegswerte m_s der Sekanten werden zu immer besseren Näherungswerten für den Anstieg m_t der Tangente an $C(f)$ an der Stelle x_0.
Die Menge der geordneten Paare $(\Delta x; m_s)$ ist eine Funktion, die jedoch für $\Delta x = 0$ nicht definiert ist.
Wenn diese Funktion für $\Delta x \to 0$ einen Grenzwert hat, so definiert man diesen Grenzwert als den Anstieg der Tangente an $C(f)$ in x_0:

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

und nennt $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ (gelesen dy nach dx an der Stelle $x = x_0$) den Differentialquotienten der Funktion f an der Stelle x_0.
Man verwendet das Wort „Anstieg" nicht nur bei Geraden. Für einen Graph, der keine Gerade ist, definiert man:

> ▶ **Def.:** Unter dem Anstieg eines Graphen mit der Gleichung $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ versteht man den Anstieg seiner Tangente an dieser Stelle.

Deshalb kann man den Differentialquotienten geometrisch auch folgendermaßen erklären:

> ▶ **Def.:** $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ ist der Anstieg des Graphen mit der Gleichung $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$. $\left(\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \tan \varphi\Big|_{x=x_0}\right)$

36.3. Differentialquotient und Geschwindigkeit

Eine wichtige charakteristische Größe der Bewegung eines Körpers ist seine Geschwindigkeit.
Wir betrachten den Sonderfall der geradlinigen Bewegung eines Massenpunktes.
Bewegt sich der Massenpunkt längs einer Geraden gleichförmig, so legt er in gleichen Zeiten Δt gleiche Wegstrecken Δs zurück. Seine Geschwindigkeit v ist konstant.

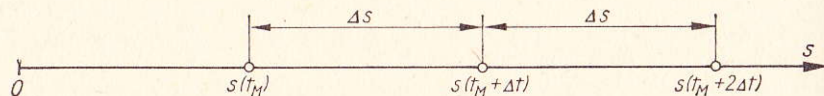


Abb. 36.2.

Hat der Massenpunkt zu einem beliebigen Zeitpunkt t_M den Weg $s(t_M)$ und zu einem späteren Zeitpunkt $t_M + \Delta t$ den Weg $s(t_M + \Delta t)$ zurückgelegt, dann ist

seine Geschwindigkeit der Quotient aus der zurückgelegten Wegstrecke $\Delta s = s(t_M + \Delta t) - s(t_M)$ und der für diese Wegstrecke erforderlichen Zeit Δt:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_M + \Delta t) - s(t_M)}{\Delta t}$$

Geschwindigkeit bei einer gleichförmigen Bewegung zu jedem beliebigen Zeitpunkt t_M

Die Geschwindigkeit bei einer geradlinig gleichförmigen Bewegung ist also der Differenzenquotient der Weg-Zeit-Funktion s mit der Gleichung $s = s(t)$.
Geradlinig gleichförmige Bewegungen treten aber sehr selten auf. Im allgemeinen sind Bewegungen ungleichförmig, so daß die Geschwindigkeit nicht konstant ist.
Die Momentangeschwindigkeit v, die ein ungleichförmig bewegter Massenpunkt zum Zeitpunkt t_M besitzt, läßt sich durch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ mit $\Delta t \neq 0$ nicht angeben. Die Bedingung $\Delta t \neq 0$ bedeutet physikalisch, daß die durch $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ bestimmte Geschwindigkeit stets einem Zeit**intervall** von endlicher Größe $\Delta t \neq 0$ und nicht einem Zeit**punkt** zuzuordnen ist.
Die Ermittlung der Momentangeschwindigkeit v zu einem Zeitpunkt t_M erfordert bei einer ungleichförmigen Bewegung die Anwendung des Funktionsbegriffes und des Grenzwertbegriffes. Dazu betrachten wir die ungleichförmige Bewegung in einem Zeitintervall $[t_M; t_M + \Delta t]$, dessen Größe Δt klein sein soll. Für ein solches kleines Zeitintervall kann man die ungleichförmige Bewegung näherungsweise durch eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ersetzen.
Der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ der Weg-Zeit-Funktion der Bewegung gibt dann für das Zeitintervall $[t_M; t_M + \Delta t]$ die Durchschnittsgeschwindigkeit (mittlere Geschwindigkeit) eines Massenpunktes bei einer ungleichförmigen Bewegung an:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_M + \Delta t) - s(t_M)}{\Delta t}$$

Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung für ein Zeitintervall $[t_M; t_M + \Delta t]$

Wählt man bei festem t_M die Größe Δt des Zeitintervalls immer kleiner, so erhält man für jedes $\Delta t \neq 0$ eine Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$. Dabei werden die $\bar{v}$-Werte zu immer besseren Näherungswerten für die Momentangeschwindigkeit v im Zeitpunkt t_M.
Die Menge der geordneten Paare $(\Delta t; \bar{v})$ ist eine Funktion, die aber für $\Delta t = 0$ nicht definiert ist.
Den Grenzwert dieser Funktion mit den Funktionswerten $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ für $\Delta t \to 0$ definiert man als die Momentangeschwindigkeit eines Massenpunktes zum Zeitpunkt t_M:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_M + \Delta t) - s(t_M)}{\Delta t} = v(t_M)$$

Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_M

Die Momentangeschwindigkeit eines Massenpunktes zum Zeitpunkt t_M ist gleich dem Differentialquotienten der Weg-Zeit-Funktion der Bewegung für

$$t = t_M : v(t_M) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_M} = \lim_{\Delta t \to 0} \left.\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{t=t_M}.$$

An dieser neuen Bedeutung des Differentialquotienten, die eine physikalische und somit eine andere als die beim Tangentenproblem ist, erkennt man die Notwendigkeit, den Differentialquotienten unabhängig von der geometrischen Anschauung analytisch zu definieren.

36.4. Differenzierbarkeit einer Funktion und Differentialquotient einer Funktion

▶ **Def.:** Die Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar genau dann, wenn
(1) f in einer Umgebung von x_0 definiert ist und
(2) der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
existiert.
Dabei ist dieser Grenzwert der Differentialquotient der Funktion f an der Stelle x_0.

Man bezeichnet den Differentialquotienten mit verschiedenen Symbolen:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=x_0}$$
$$= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0) = y'\Big|_{x=x_0} = y'(x_0)$$

(gelesen: y Strich an der Stelle x_0)

Aus allen bisherigen Überlegungen erkennt man, daß der Differentialquotient einer Funktion f an einer bestimmten Stelle x_0 eine reelle Zahl ist.
Wir suchen nun eine Bedingung für die Differenzierbarkeit. Eine einfache hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit gibt es nicht. Es gibt aber eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit, nämlich die Stetigkeit.

■ *Satz:* Die Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle x_0 ist eine notwendige Bedingung für ihre Differenzierbarkeit an dieser Stelle.

Zum Beweis dieses Satzes erinnern wir uns daran, daß bei einer Implikation „Wenn A, so B"
1. A eine hinreichende Bedingung für B ist und
2. B eine notwendige Bedingung für A ist.
Wir müssen obigen Satz als Implikation formulieren. Wir schreiben deshalb:

Wenn eine Funktion f in x_0 differenzierbar ist, so ist f in x_0 stetig.

Diese Implikation beweisen wir.

Voraussetzung:

Die Funktion f mit $y = f(x)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar, d. h., $f(x)$ ist in einer Umgebung von x_0 definiert, und es existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \in R.$$

Behauptung:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

Da wir beim Beweis die Voraussetzung verwenden, schreiben wir die Behauptung in einer Form, die der Voraussetzung nahe kommt:

$$\left[\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x)\right] - f(x_0) = 0.$$

Beweis:

$$\left[\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x)\right] - f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x\right]$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Damit ist bewiesen, daß die Stetigkeit einer Funktion eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit dieser Funktion ist.

Beispiel:

Es gibt Funktionen, die an einer bestimmten Stelle stetig, aber nicht differenzierbar sind, weil die Stetigkeit nur eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit ist. Ein Beispiel dafür ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = |x|$. Diese Funktion ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig, denn sie ist für $x_0 = 0$ definiert, und es gilt $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ für jede Folge $\Delta x \to 0$.
Für den Differenzenquotienten dieser Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ gilt:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 & \text{für} \quad \Delta x > 0. \\ -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1 & \text{für} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$$

Man sieht, daß der Differenzenquotient für $\Delta x > 0$ und $\Delta x < 0$ konstant ist. Deshalb folgt für die Ableitung:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \Delta x > 0 \\ -1 & \text{für} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$$

Es existieren also der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 0$. Da aber beide Grenzwerte verschieden sind, ist die Funktion f mit $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welche Wissenschaftler arbeiteten die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung aus?
2. Welche Bedingungen müssen vorliegen, damit eine „Doppelentdeckung" wie die der Differential- und Integralrechnung möglich ist?
3. Warum förderte die Bourgeoisie im 17. Jahrhundert die Entwicklung der Mathematik und der Naturwissenschaften?
4. Von welchen Problemen gingen Newton und Leibniz aus?
5. Was berechnet man mit $\tan \varphi = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn $P_1(x_1; y_1)$ und $P_0(x_0; y_0)$ zwei Punkte auf dem Graph einer Funktion f sind?
6. Warum nennt man den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Differenzenquotient?
7. Wie nennt man die Quotienten $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{dy}{dx}$?
8. Was versteht man unter dem Anstieg des Graphen mit der Gleichung $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$?
9. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit eine Funktion f an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar ist?
10. Was für eine Bedingung ist die Stetigkeit für die Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle $x = x_0$?
11. Sind alle an der Stelle x_0 stetigen Funktionen in x_0 auch differenzierbar?

Aufgaben

1. Lesen Sie!

1. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$;
2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$;
3. $y' = f'(x)$;
4. $f'(0)$;
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta x} = \frac{d\vartheta}{dx}$
6. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\bigg|_{x=x_0} = \frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}$
7. $y'|_{x=x_0} = f'(x_0)$
8. $g'(-2)$

2. Bilden Sie Sätze mit der Zustandsform des Passivs!

Zwei Punkte bestimmen eindeutig eine Gerade.

► Eine Gerade ist eindeutig durch zwei Punkte bestimmt.

1. Zwei Punkte auf dem Graph einer Funktion bestimmen eine Sekante.
2. Der Differenzenquotient bestimmt den Anstieg m_s der Sekante.
3. $m_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ gibt den Anstieg der Sekante an.
4. Eine Gleichung $s = s(t)$ gibt die Zuordnung zwischen s und t an.

3. Erläutern Sie, wie Leibniz das Problem, den Anstieg der Tangente an den Graph einer Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ im Punkt P_0 zu berechnen, löste!
4. Wann sprechen wir davon, daß eine Aufgabe der Differentialrechnung vorliegt? Geben Sie einige Beispiele dafür an!
5. Nennen Sie die Definition für die Differenzierbarkeit einer Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$!
6. Welche Überlegungen sind erforderlich, wenn man die notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle $x = x_0$ beweisen will?
7. Sprechen Sie über Differenzierbarkeit und Stetigkeit der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$!
8. Geben Sie die Umformung an, die man durchführen muß, um zu zeigen, daß die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{und} \quad \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

äquivalent sind!

9. Beweisen Sie den Satz:
Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, so ist sie an der Stelle x_0 stetig!
10. Bilden Sie die Kontraposition zur Implikation:
Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, so ist die Funktion f an der Stelle x_0 stetig! Begründen Sie, warum dieser Satz keine Äquivalenz ist!

37. Ableitungen rationaler Funktionen

37.1. Ableitung einer Funktion

Bei der Erklärung des Begriffs „Ableitung einer Funktion" wollen wir von zwei Aufgaben ausgehen.

I. Welchen Wert hat der Differentialquotient der Funktion f mit $y = f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$?

a) Wir stellen den Differenzenquotienten auf:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\bigg|_{x_0=3} = \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{(3 + \Delta x)^2 - (3)^2}{\Delta x}$$

Wenn wir bei diesem Differenzenquotienten sofort Δx gegen 0 gehen lassen, so erhalten wir als Grenzwert den nicht definierten Ausdruck $\frac{0}{0}$. Wir müssen deshalb den Differenzenquotienten erst so umformen, daß wir beim Grenzübergang nicht $\frac{0}{0}$ erhalten.

b) Umformen des Differenzenquotienten:

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x_0=3} = \frac{(3+\Delta x)^2-(3)^2}{\Delta x} = \frac{9+6\Delta x+(\Delta x)^2-9}{\Delta x}$$
$$= \frac{\Delta x(6+\Delta x)}{\Delta x} = 6+\Delta x$$

c) Grenzübergang $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x_0=3} = \lim_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0=3} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0=3} = 6$$

2. Berechnen Sie den Differentialquotienten der Funktion f mit $y=f(x) = x^3-6x$ an der Stelle $x = x_0$!

a) Aufstellung des Differenzenquotienten:

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$= \frac{[(x_0+\Delta x)^3-6(x_0+\Delta x)]-(x_0^3-6x_0)}{\Delta x}$$

Bei sofortigem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ erhält man wieder $\frac{0}{0}$.

b) Umformung des Differenzenquotienten:

$$\frac{[(x_0+\Delta x)^3-6(x_0+\Delta x)]-(x_0^3-6x_0)}{\Delta x}$$
$$= \frac{x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-6x_0-6\Delta x-x_0^3+6x_0}{\Delta x}$$
$$= \frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2-6)}{\Delta x}$$
$$= 3x_0^2-6+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

c) Grenzübergang $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}[3x_0^2-6+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2] = 3x_0^2-6$$

An der Stelle $x = x_0$ erhält man

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = 3x_0^2-6.$$

$m = 3x_0^2 - 6$ ist der Anstieg des Graphen mit der Gleichung $y = x^3 - 6x$ an der beliebigen, aber festen Stelle $x_0 \in D(f)$. Damit kann man den Anstieg z. B. an den Stellen $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ und $x_4 = 3$ berechnen:

$$m\Big|_{x_1=-2} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_1=-2} = 3\cdot(-2)^2-6 = 6$$
$$m\Big|_{x_2=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_2=0} = 3\cdot 0^2-6 = -6$$
$$m\Big|_{x_3=1} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_3=1} = 3\cdot 1^2-6 = -3$$
$$m\Big|_{x_4=3} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_4=3} = 3\cdot 3^2-6 = 21$$

Man kann also bei der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 - 6x$ jedem $x \in R$ eindeutig einen Differentialquotienten zuordnen.
Wenn bei einer beliebigen Funktion f zu jedem $x \in D(f)$ ein Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ existiert, kann man die Menge der x-Werte eindeutig auf die Menge der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ abbilden. Diese Abbildung ist eine Funktion, die wir mit f' (gelesen: „f Strich") bezeichnen:

■ $$f' = \left\{\left(x; \frac{dy}{dx}\right) \,\middle|\, \frac{dy}{dx} = f'(x) \wedge x \in D(f')\right\}.$$

Die Funktion f' ist von der Funktion f abgeleitet. Man nennt deshalb die Funktion f' mit $y' = f'(x)$ die Ableitung der Funktion f mit $y = f(x)$. Man bezeichnet oft auch kurz $y' = f'(x)$ als Ableitung. Beim obigen Beispiel ist $y' = f'(x) = 3x^2 - 6$ die Ableitung von $y = f(x) = x^3 - 6x$.
Will man die Ableitung einer Funktion erhalten, muß man auf Grund der Definition zuerst den Differenzenquotienten dieser Funktion bilden. Dann muß nach geeigneter Umformung der Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$ gebildet werden. Für das praktische Ermitteln von Ableitungen ist es wesentlich rationeller, alle uns bekannten Funktionentypen in allgemeiner Form zu differenzieren. Die so gefundenen Regeln werden dann bei der Bildung der Ableitung einer speziellen Funktion verwendet. Es entfällt dadurch die spezielle Grenzwertbestimmung des Differenzenquotienten.
Dazu ist notwendig, die Ableitungen der ganzrationalen Funktionen, der gebrochenrationalen Funktionen, der Wurzelfunktionen, der Exponentialfunktionen, der Logarithmusfunktionen, der Winkelfunktionen und der Arkusfunktionen zu ermitteln.

37.2. Ableitung ganzrationaler Funktionen

Um ganzrationale Funktionen mit der Gleichung

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

differenzieren zu können, braucht man in allgemeiner Form die Ableitung der Potenzfunktion, einer Funktion der Form $y = c \cdot f(x)$ (c = konst.), einer Summe von Funktionen und der konstanten Funktion $f(x) = a_0$.
Wenn man für diese allgemeinen Funktionentypen die Ableitung in allgemeiner Form bildet, so erhält man folgende 4 Ableitungsregeln:

37.2.1. Ableitung der Potenzfunktion mit der Gleichung $y = f(x) = x^n$ mit $n \in G^+$

■ *Satz:* Die Potenzfunktionen mit $f(x) = x^n$ ($n \in G^+$) sind für jedes $x \in R$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Voraussetzung:

Die Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in G^+$ sind für jedes $x \in R$ stetig.

Behauptung:

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ für alle $x \in R$ und $n \in G^+$

Beweis:

1. Aufstellen des Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

2. Umformen des Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n} (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + \binom{n}{n} (\Delta x)^{n-1}\right]}{\Delta x}$$

$$= nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + \binom{n}{n} (\Delta x)^{n-1}$$

3. Grenzwertbildung:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + \binom{n}{n} (\Delta x)^{n-1}\right]$$
$$= nx^{n-1}$$

w. z. b. w.

Die Formel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ lautet in Worten:
Man differenziert die Potenz einer unabhängigen Variablen, indem man den Exponenten als Faktor vor die Potenz schreibt und den Exponenten der Potenz um 1 vermindert.

37.2.2. Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor

■ *Satz:* Wenn die Funktion f mit $y = f(x)$ differenzierbar ist, so ist es auch die Funktion g mit $g(x) = c \cdot f(x)$ (c = konst.), und es gilt:

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

Voraussetzung:

Die Funktion f ist im Definitionsbereich der Funktion differenzierbar, es gilt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad \text{für jedes} \quad x \in D(f).$$

Behauptung:

$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ für jedes $x \in D(f)$ und c eine beliebige Konstante.

Beweis:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} = c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= c \cdot f'(x)$$

w. z. b. w.

Man kann diesen Satz auch so formulieren:
Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

37.2.3. Ableitung einer Summe

■ *Satz:* Wenn zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ in $(a; b)$ differenzierbar sind, ist auch die Funktion $s(x) = u(x) + v(x)$ in $(a; b)$ differenzierbar, und es gilt:

$$s'(x) = [u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$

Voraussetzung:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x)$$

Behauptung:

$$s'(x) = [u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$

Beweis:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(x + \Delta x) - s(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - (u(x) + v(x))}{\Delta x}$$
$$= \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$s'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(x + \Delta x) - s(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right]$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$
$$= u'(x) + v'(x)$$

w. z. b. w.

Durch Schluß von n auf $n + 1$ kann man zeigen, daß diese Regel auch für

mehr als zwei Summanden gilt. Auch für Differenzen gilt diese Regel entsprechend.
Die Regel lautet in Worten: Man kann eine Summe von Funktionen gliedweise differenzieren.

37.2.4. Ableitung einer konstanten Funktion

■ *Satz:* Jede in einem Intervall $(a; b)$ konstante Funktion mit $f(x) = c$ ist in $(a; b)$ differenzierbar, und es gilt für jedes x aus $(a; b)$:

$$f'(x) = (c)' = 0$$

Voraussetzung:

$$\forall x \in (a; b): f(x) = c;\ c \in R$$

Behauptung:

$$f'(x) = 0$$

Beweis:

Für jedes $\Delta x \neq 0$ mit $x + \Delta x \in (a; b)$ gilt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0, \text{ so daß auch}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = 0 \text{ ist.}$$

w. z. b. w.

Beispiele:

(1) $y = f(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 7$ mit
$p(x) = 3x^4;\ q(x) = -6x^3;\ r(x) = 5x^2;\ s(x) = -7$
$p'(x) = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3;\ q'(x) = -6 \cdot 3x^{3-1} = -18x^2;$
$r'(x) = 5 \cdot 2x^{2-1} = 10x;\ s'(x) = 0.$
Daraus ergibt sich
$y' = f'(x) = 12x^3 - 18x^2 + 10x$

(2) $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 5$
$y' = 3x^2 - 6x - 4$

(3) $y = x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 2$
$y' = 4x^3 - 21x^2 - 6x$

37.3. Ableitung eines Produkts (Produktregel)

Wir betrachten die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = (x^3 - 3x^2 - 4x + 5) \cdot (x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 2)$$

Können wir diese Funktion differenzieren?
Wir haben noch nicht gelernt, wie man ein Produkt $u(x) \cdot v(x)$ von 2 Faktoren differenziert. Wir müßten deshalb zuerst die Klammern ausmultiplizieren und könnten dann differenzieren. Das ist ein großer rechnerischer Aufwand, den wir vermeiden wollen. Außerdem gibt es auch Funktionen, die mit Hilfe von Pro-

dukten mehrerer Terme dargestellt werden, wobei diese Produkte nicht vereinfacht werden können, z. B.

$$f(x) = x \cdot \sin x, \quad f(x) = e^{-x} \cdot \cos x.$$

Deshalb lernen wir, wie man ein Produkt von 2 Faktoren ableitet.

■ *Satz:* Wenn zwei Funktionen u und v mit $u(x)$ und $v(x)$ in $(a; b)$ differenzierbar sind, so ist auch die Funktion p mit $p(x) = u(x) \cdot v(x)$ in $(a; b)$ differenzierbar, und es gilt:

$$p'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad \text{(Produktregel)}$$

Voraussetzung:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x)$$

Behauptung:

$$p'(x) = (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beweis:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

Wegen der Voraussetzungen formt man diesen Quotienten so um, daß man die Differenzenquotienten der Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ erhält. Das erreicht man durch Subtraktion und Addition des Terms $u(x) \cdot v(x + \Delta x)$ im Zähler.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= v(x + \Delta x) \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[v(x + \Delta x) \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

w. z. b. w.

Diese Formel lautet als Merksatz:

Man differenziert ein Produkt aus 2 Faktoren, indem man die Ableitung des 1. Faktors mit dem 2. Faktor multipliziert, dann den 1. Faktor mit der Ableitung des 2. Faktors multipliziert und beide Produkte addiert.

Beispiel:

$$((x^3 - 3x^2 - 4x + 5)(x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 2))'$$
$$= (3x^2 - 6x - 4)(x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 2)$$
$$+ (x^3 - 3x^2 - 4x + 5)(4x^3 - 21x^2 - 6x)$$

Die Produktregel kann auf n Faktoren verallgemeinert und mit dem Schluß von n auf $n + 1$ bewiesen werden.

$$[u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot u_3(x) \ldots u_n(x)]'$$
$$= u_1'(x) \cdot u_2(x) \cdot u_3(x) \ldots u_n(x)$$
$$+ u_1(x) \cdot u_2'(x) \cdot u_3(x) \ldots u_n(x)$$
$$+ u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot u_3'(x) \ldots u_n(x)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot u_3(x) \ldots u_n'(x)$$

37.4. Ableitung eines Quotienten (Quotientenregel)

Wir können alle ganzrationalen Funktionen und Produkte von solchen Funktionen differenzieren. Als nächstes wollen wir gebrochenrationale Funktionen ableiten.

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

Da gebrochenrationale Funktionen Quotienten aus 2 ganzrationalen Funktionen sind, müssen wir lernen, wie man Quotienten ableitet.

■ *Satz:* Wenn die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ in $(a; b)$ differenzierbar sind und $v(x) \neq 0$ ist, so ist auch die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ in $(a; b)$ differenzierbar, und für ihre Ableitung gilt:

$$f'(x) = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

Voraussetzung:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x)$$

Wir wollen den Beweis mit Hilfe der Produktregel führen, ohne daß wir den Differenzenquotienten für $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ aufstellen.

Produktregel:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Behauptung:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Beweis:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f(x) \cdot v(x) = u(x) \quad \Big| \frac{d}{dx} \quad \text{(auf beiden Seiten der Gleichung differenzieren)}$$

$$f'(x) \cdot v(x) + f(x) \cdot v'(x) = u'(x)$$
$$f'(x) \cdot v(x) = u'(x) - f(x) \cdot v'(x)$$
$$= u'(x) - \frac{u(x)}{v(x)} \cdot v'(x)$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)}}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Die Quotientenregel lautet in Worten:

Man differenziert einen Quotienten, indem man die Ableitung des Zählers mit dem Nenner multipliziert und von diesem Produkt das Produkt aus dem Zähler und der Ableitung des Nenners subtrahiert. Diese Differenz wird durch das Quadrat des Nenners dividiert.

Beispiele:

(1) $$y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 5}{x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 2}$$

$$y' = \frac{(3x^2 - 6x - 4)(x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 2)}{(x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 2)^2} - \frac{(x^3 - 3x^2 - 4x + 5) \cdot (4x^3 - 21x^2 - 6x)}{(x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 2)^2}$$

(Die Klammern können noch ausmultipliziert werden.)

(2) $$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$y' = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)\,2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

(3) $$y = \frac{1}{x^3}; \; y' = \frac{0 \cdot x^3 - 1 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4} \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

37.5. Ableitung einer Potenzfunktion mit negativ-ganzzahligem Exponenten

Mit Hilfe der Quotientenregel ist es möglich, zu beweisen, daß die Regel für die Ableitung einer Potenzfunktion auch für negative ganzzahlige Exponenten gilt.

■ *Satz:* Die Potenzfunktion mit $f(x) = x^{-m}$ ($m \in G^+$) sind für alle $x \in R \setminus \{0\}$ differenzierbar, und es gilt:
$(x^{-m})' = -m \cdot x^{-m-1}$

Voraussetzung:

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad m \in G^+ \quad \text{und} \quad x \neq 0$$

Behauptung:

$$(x^{-m})' = -m \cdot x^{-m-1}$$

Beweis:

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m} \quad \Big| \text{ Anwendung der Quotientenregel}$$

$$y' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -m \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{2m}}$$

$$y' = -m \cdot x^{-m-1} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Diese Relation gilt unter der genannten Voraussetzung für x auch für $m = 0$. Damit gilt die Regel für die Ableitung der Potenzfunktion $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ für alle ganzzahligen Exponenten, wobei für $n \in G^- \cup \{0\}$ die Basis $x \neq 0$ sein muß.

Beispiele:

(1) $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$; $y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

(2) $y = x^{-3}$; $y' = -3x^{-4}$

(3) $y = \frac{1}{2x^6}$; $y' = -\frac{6}{2} \cdot x^{-7} = -\frac{3}{x^7}$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Von welchen Funktionentypen muß man die Ableitungen kennen, wenn man eine ganzrationale Funktion differenzieren will?
2. Welche Ableitung hat die Potenzfunktion mit der Gleichung $f(x) = x^n$, $n \in G^+$?
3. Welchen Satz benutzt man bei der Darstellung von $(x + \Delta x)^n$ als Summe von Potenzen?
4. Was kann man über den konstanten Faktor $k \in R$ bei der Ableitung einer Funktion mit der Gleichung $y = k \cdot f(x)$ sagen?

5. Wie kann man zeigen, daß die Ableitung einer Summe auch für mehr als 2 Summanden gilt?
6. Welche Voraussetzung wird im Satz über die Ableitung eines Produkts gemacht?
7. Warum formt man beim Beweis der Produktregel den Differenzenquotienten so um, daß man den Term $u(x) \cdot v(x + \Delta x)$ im Zähler des Differenzenquotienten subtrahiert und addiert?
8. Wie lautet der Satz über die Ableitung eines Produkts?
9. Wie lautet der Satz über die Ableitung eines Quotienten?

Aufgaben

1. $f(x) = x^2$

► Die Ableitung von $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$.

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = x^2 + x$;
3. $u(x) = x - x^2 - x^3$
4. $f(x) = c$
5. $f(x) = x - x^2$;
6. $v(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x$
7. $f(x) = x^3$
8. $f(x) = x^2 - x$

2. Bilden Sie die Ableitung!

1. $f(x) = (x + 1)(x - 1)$
2. $f(x) = (x^2 + 5)(x^3 - x^2)$
3. $f(x) = x^2(4x - 3)$
4. $f(x) = (x - 3)(x - 4)$
5. $f(x) = (x^2 + a)(x^2 + b)$
6. $f(x) = x(x - 5)(x^2 + 3)$

3. Bilden Sie die Ableitung!

1. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$
3. $f(x) = \frac{1}{4x^3}$
4. $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 5)(x - 3)}$
5. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x + 5}$
6. $f(x) = \frac{x + 5}{x^2 - 7x + 12}$
7. $f(x) = \frac{1}{x + 1}$
8. $f(x) = \frac{1}{3x^2}$
9. $f(x) = \frac{5}{x^2 - 4}$
10. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$
11. $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{x^2 - 1}$
12. $f(x) = \frac{x - 7}{x^2 - 5x + 14}$

4. Berechnen Sie die Funktionswerte der Funktionen und ihrer Ableitungen an den angegebenen Stellen!

1. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x + 18$; $x = 0$
2. $f(x) = 5x^3 - 8x^2 + 12$; $x = 2$
3. $f(x) = \frac{x^5}{10} - 3x^4 + \frac{x^2}{8} - 6$; $x = 2$
4. $f(x) = 0{,}4x^3 - 9{,}6x^2 + 75{,}6$; $x = 1$

5. Geben Sie die Bedingungen an, unter denen die Funktionen mit Gleichungen der folgenden Form differenzierbar sind!

1. $s(x) = u(x) + v(x)$
2. $p(x) = u(x) \cdot v(x)$
3. $r(x) = c \cdot v(x), \quad c =$ konst.
4. $q(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

6. Beweisen Sie

1. den Satz über die Ableitung einer Konstanten,
2. den Satz über die Ableitung einer Summe,
3. die Produktregel,
4. die Quotientenregel,
5. den Satz über die Ableitung der Potenzfunktion mit $y = x^n$ und $n \in G^+$!

7. Beweisen Sie durch Schluß von n auf $n + 1$, daß für alle $n \geqq 1$ gilt:
Sind die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion s mit $s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ in x_0 differenzierbar, und an der Stelle x_0 ist $s'(x_0) = u_1'(x_0) + \ldots + u_n'(x_0)$.

8. Beweisen Sie durch Schluß von n auf $n + 1$ die Produktregel fü r n Faktoren

$$(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n)' = u_1' \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n + \ldots + u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n'$$

9. Beweisen Sie, daß aus der Produktregel für n Faktoren die Potenzregel folgt, wenn jeder Faktor $u_i(x) = x$ ist!

10. Beantworten Sie die folgenden Fragen!

1. Warum ermittelt man für die bekannten Funktionentypen Ableitungsregeln?
2. Müssen wir beim Beweis der Quotientenregel den Differenzenquotienten aufstellen? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
3. Wie kann man beweisen, daß die Regel für die Ableitung der Potenzfunktion auch für negative ganze Exponenten gilt?

38. Der Differentialquotient als Quotient von Differentialen

Wir definierten den Differentialquotienten einer Funktion f mit $y = f(x)$ als Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ und benutzten $\dfrac{dy}{dx}$ als Symbol für diesen Grenzwert.
Für viele physikalische und technische Probleme ist es zweckmäßig, $\dfrac{dy}{dx}$ nicht nur

als Symbol für diesen Grenzwert zu verstehen, sondern als Quotienten zweier endlicher Größen dy und dx.
Man bezeichnet die Größen dx und dy als Differentiale.
Um den Begriff „Differential einer Funktion“ einzuführen, betrachten wir die Abbildung, auf der der Graph einer differenzierbaren Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ und die Tangente im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ an den Graph dargestellt sind.

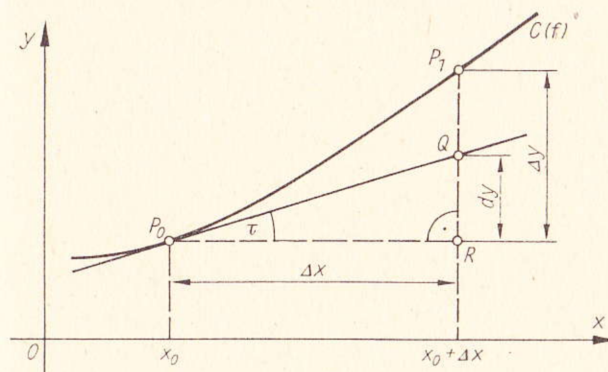


Abb. 38.1. Differential einer Funktion

Die Punkte P_0 und P_1 liegen auf dem Graph der Funktion f. x_0 sei die Abszisse des Punktes P_0 und $x_0 + \Delta x$ die des Punktes P_1. Der Abszisse $x_0 + \Delta x$ wird durch die Funktionsgleichung die Ordinate $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ zugeordnet. Δx sei eine beliebige kleine, aber von Null verschiedene Größe.
Man bezeichnet Δx als den Zuwachs der unabhängigen Variablen und $l(\overline{RP_1}) = \Delta y$ als den Zuwachs der Funktion f (Ordinatenzuwachs). Für $l(\overline{RQ})$ schreibt man dy, also $l(\overline{RQ}) = dy$. In dem Tangentendreieck P_0RQ gilt: $\tan\tau = \dfrac{l(\overline{RQ})}{l(\overline{P_0R})} = \dfrac{dy}{\Delta x}$.
Da die Funktion f differenzierbar ist, also an der Stelle x_0 die Ableitung existiert, ist $\tan\tau = f'(x_0)$. Es gilt dann $dy = f'(x_0)\,\Delta x$. Bezeichnet man noch den Zuwachs der unabhängigen Variablen Δx mit dx, dann gilt: $dy = f'(x_0)\,dx$. Man nennt dy das Differential der Funktion f und dx das Differential der unabhängigen Variablen. Bei dieser Darstellung sind dy und dx endliche Größen, die im allgemeinen $\neq 0$ sind. Wir können eine Zwischenzusammenfassung geben:

■ Im Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$ ist:
Δx der Zuwachs der unabhängigen Variablen,
dx das Differential der unabhängigen Variablen mit $\Delta x = dx$,
Δy der Zuwachs der Funktion f (Ordinatenzuwachs der Funktion),
dy das Differential der Funktion f (Ordinatenzuwachs der Tangente)

Vergleicht man den Ordinatenzuwachs Δy der Funktion f mit dem Differential dy, so sieht man, daß im allgemeinen $dy \neq \Delta y$ ist, daß sich aber dy dem Wert Δy um so mehr nähert, je kleiner Δx ist. Für kleine Δx gilt: $\Delta y \approx dy$.

Das bedeutet, daß der Graph der Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ in einer kleinen Umgebung der Stelle x_0 durch die Tangente im Punkt P_0 an dem Graph ersetzt werden darf. Diese Näherungsformel erlaubt es auch, in physikalischen, technischen und geometrischen Untersuchungen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen statt mit dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit dem Quotienten $\frac{dy}{dx}$ der Differentiale dy und dx zu rechnen.
Nach dieser Einführung von dx als Differential der unabhängigen Variablen und dy als Differential der Funktion können wir den Differentialquotienten als Quotient von Differentialen darstellen:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Da die Differentiale endliche Größen sind, gilt auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

(Ableitung der Funktion f mit $y = f(x)$ und ihrer inversen Funktion $\bar{f}$ mit $x = \bar{f}(y)$).

Das werden wir bei der Ableitung der Wurzelfunktion mit der Gleichung $y = \sqrt[n]{x}$ anwenden.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welche Bedeutung haben Δx, dx, Δy, dy im Zusammenhang mit dem Begriff „Differential einer Funktion"?
2. Was versteht man unter dem Differential der Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$?
3. Welche analytische und geometrische Bedeutung haben die Größen dy und dx?
4. Welche Näherungsformel gilt für Δy und dy, und unter welchen Bedingungen gilt diese Näherungsformel?
5. Warum ist es möglich, mit Hilfe der Differentiale folgende Formel zu schreiben:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\bar{f}(y)}{dy}}?$$
6. Wodurch kann der Graph einer Funktion in einer kleinen Umgebung von x_0 ersetzt werden?
7. Warum darf man bei physikalischen, technischen und geometrischen Untersuchungen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen mit Differentialen rechnen?
8. Was sagt die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ über die Ableitung zueinander inverser Funktionen aus?

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Differentiale der Funktionen mit folgenden Gleichungen!
   1. $f(x) = x^2$
   2. $f(x) = x^3 - x$
   3. $f(x) = 2x$
   4. $f(x) = \frac{1}{x}$
2. Berechnen Sie mit der Formel $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ den Zuwachs der Funktion f (Ordinatenzuwachs) mit $f(x) = x^2 - 5x + 6$ an der Stelle $x_0 = 3$ für $\Delta x = 1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01$!
   Berechnen Sie das Differential der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 5x + 6$ an der Stelle $x_0 = 3$ für $dx = 1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01$!
   Vergleichen Sie die Ergebnisse!

39. Ableitungen nichtrationaler Funktionen

39.1. Ableitung einer Wurzelfunktion

Wir haben bei der Behandlung der Wurzelfunktionen mit $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ gezeigt, daß sie die inversen Funktionen zu den Potenzfunktionen mit $x = \bar{f}(y) = y^n$ sind, wenn die Basen positiv und damit die Funktionen eineindeutig sind. Das benutzen wir beim folgenden Beweis.

Satz: Die Ableitung der Wurzelfunktion mit der Gleichung

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \text{ist} \quad y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Voraussetzung:

$y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist die inverse Funktion von
$x = \bar{f}(y) = y^n \quad (x > 0; y > 0)$
f und $\bar{f}$ sind eineindeutige Funktionen.

Behauptung:

$$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}; \quad (x > 0)$$

Beweis:

Man bildet von der Funktion $\bar{f}$ mit der Gleichung $x = \bar{f}(y) = y^n$ die Ableitung $\frac{dx}{dy} = n \cdot y^{n-1}$. Aus der Relation zwischen den Ableitungen zueinander inverser Funktionen folgt:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

w. z. b. w.

Durch Umformung der Wurzel erkennen wir, daß die Regel für die Ableitung einer Potenzfunktion auch auf Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten anwendbar ist:

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Beispiel:

$$y = \sqrt[7]{x}; \quad y' = \frac{1}{7 \cdot \sqrt[7]{x^6}} \quad \text{oder}$$

$$y = x^{\frac{1}{7}}; \quad y' = \frac{1}{7} \cdot x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7} \cdot x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7 \cdot \sqrt[7]{x^6}}.$$

39.2. Ableitung von verketteten Funktionen

(Ableitung einer mittelbaren Funktion)

Wir wollen die Funktion f mit der Gleichung $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 7}$ differenzieren. f ist eine Funktion von einer Funktion, denn wir haben eine Wurzelfunktion und als Radikand den Term einer ganzrationalen Funktion. Setzt man:

$$x^2 + 2x - 7 = g(x) = z \quad \text{und}$$

$$\sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{z} = f(z), \quad \text{so folgt:}$$

$$y = v(x) = f(z) = f[g(x)] = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 7}.$$

$y = f[g(x)] = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 7}$ ist also die Gleichung einer Funktion f von einer Funktion g. Man nennt f die „äußere Funktion" und g die „innere Funktion". Man sagt auch:
v ist eine mittelbare Funktion von x.
Die Funktionen f und g sind verkettet.

Weitere Beispiele für verkettete Funktionen:

verkettete Funktion	innere Funktion	äußere Funktion
$y = (x^2 + 3x - 2)^4$	$g(x) = x^2 + 3x - 2$	$f(z) = z^4$ $f[g(x)] = (x^2 + 3x - 2)^4$
$y = \sin(3x - 2)$	$g(x) = 3x - 2$	$f(z) = \sin z$ $f[g(x)] = \sin(3x - 2)$
$y = \lg \lvert\sin x\rvert$	$g(x) = \sin x$	$f(z) = \lg \lvert z\rvert$ $f[g(x)] = \lg \lvert\sin x\rvert$
$y = \sin^2 x$ $= (\sin x)^2$	$g(x) = \sin x$	$f(z) = z^2$ $f[g(x)] = \sin^2 x$
$y = \sin (x)^2$	$g(x) = x^2$	$f(z) = \sin z$ $f[g(x)] = \sin x^2$

Der Definitionsbereich der verketteten (mittelbaren) Funktion $f[g(x)]$ ist stets nur eine (echte oder unechte) Teilmenge des Definitionsbereichs der inneren

Funktion g. Der Definitionsbereich von $f[g(x)]$ kann nur die Elemente x enthalten, denen ein Element z aus dem Durchschnitt $W(g) \cap D(f)$ zugeordnet ist.

Für das Beispiel $f[g(x)] = \sqrt{x + 1}$ ergibt sich:

$$z = g(x) = x + 1 \quad x \in D(g) = (-\infty; +\infty); \quad z \in W(g) = (-\infty; +\infty)$$

$$y = f(z) = \sqrt{z} \quad z \in D(f) = [0; +\infty).$$

Der Durchschnitt von $W(g)$ und $D(f)$ ist

$$(-\infty; +\infty) \cap [0; +\infty) = [0; +\infty),$$

also $z \geqq 0$. Daraus folgt $z = x + 1 \geqq 0$ bzw. $x \geqq -1$.
Der Definitionsbereich $D(v)$ der verketteten Funktion ist das Intervall $-1 \leqq x < +\infty$, das ist aber eine Teilmenge des Definitionsbereichs der Funktion g, $D(v) \subset D(g)$.

Der folgende Satz gibt Auskunft, wie man die Ableitung einer mittelbaren Funktion bildet.

■ **Die Kettenregel**
Sind $z = g(x)$ in $(a; b)$ und $y = f(z)$ in $I \subseteqq (g(a); g(b))$ differenzierbar, so ist auch die Funktion v mit der Gleichung $y = v(x) = f[g(x)]$, die durch Verkettung von g und f entsteht, in I differenzierbar, und es ist

$$y' = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

Voraussetzung:

$z = g(x)$ in $(a; b)$ differenzierbar
$y = f(z)$ in $I \subseteqq (g(a); g(b))$ differenzierbar
$\mathrm{d}z = g'(x)\,\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y = f'(z)\,\mathrm{d}z$

Behauptung:

$$y' = f'[g(x)] \cdot g'(x) \quad \text{in} \quad I$$

Beweis:

Wenn man die Differentiale verwendet, so kann man den Beweis in folgender Form führen:

$$y' = v'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad f'(z) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \quad \text{und} \quad g'(x) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

$$= f'(z) \cdot g'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

w. z. b. w

Beispiele:

(1) $y = (x^2 + 3x - 2)^4$

$g(x) = x^2 + 3x - 2; \quad f(z) = z^4$
$g'(x) = 2x + 3 \quad f'(z) = 4z^3$
$y' = f'[g(x)] \cdot g'(x) = 4(x^2 + 3x - 2)^3 \cdot (2x + 3)$

(2) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 7}$

$$g(x) = x^2 + 2x - 7 \qquad f(z) = \sqrt[3]{z}$$

$$g'(x) = 2x + 2 \qquad f'(z) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{z^2}}$$

$$y' = f'[g(x)] \cdot g'(x) = \frac{2x + 2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 2x - 7)^2}}$$

(3) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$;

$$z = g(x) = \frac{x+1}{x-1}; \qquad y = f(z) = \sqrt{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1(x-1) - (x+1)\,1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}; \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\,(x-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$

Auch eine Funktion, die durch Verkettung von mehr als zwei differenzierbaren Funktionen entsteht, ist wieder eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung entsprechend ermittelt werden kann. So erhält man beispielsweise für die Funktion φ, die durch Verkettung der Funktionen f, g und h mit $y = f(z)$, $z = g(u)$ und $u = h(x)$ entsteht, unter analogen Voraussetzungen

$$y' = \varphi'(x) = f'(z) \cdot g'(u) \cdot h'(x) \text{ bzw.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Beispiel:

$$y = \sqrt[3]{(2x+1)^2};$$

$$y = f(z) = \sqrt[3]{z}; \quad z = g(u) = u^2; \quad u = h(x) = 2x + 1$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{z^2}}; \quad \frac{dz}{du} = 2u; \quad \frac{du}{dx} = 2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{z^2}} \cdot 2u \cdot 2 = \frac{4(2x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x+1)^4}} = \frac{4}{3 \cdot \sqrt[3]{2x+1}}$$

39.3. Ableitung der Logarithmusfunktion

Da wir für die weiteren Betrachtungen Logarithmen mit verschiedenen Basen verwenden müssen, wollen wir zuerst den Zusammenhang zwischen solchen

Logarithmen wiederholen. Man kann die Logarithmen eines Systems (Basis a) durch einfache Multiplikation mit einer passenden Konstanten in die Logarithmen jedes anderen Systems (Basis b) umrechnen.

■ *Satz:* Für alle reellen $x > 0$ und alle reellen $a > 1$ und $b > 1$ gilt:

$$\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a x.$$

Im Sonderfalle ist $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

Ohne Beweis sei noch mitgeteilt, daß aus $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ mit $n \in N \setminus \{0\}$ für $x \in R \setminus \{0\}$ und für $\dfrac{1}{x} = z$ folgt: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{z\to 0}(1 + z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}$.

Für die Ableitung der Logarithmusfunktion gilt der

■ *Satz:* Jede Logarithmusfunktion mit der Gleichung $y = f(x) = \log_a x$ ($a > 1$ und $x > 0$) ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar, und es gilt:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a \mathrm{e} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Voraussetzung:

1) Basis $a > 1$ reell, $x \in R^+$
2) $\lim\limits_{x\to x_0}(\log_a x) = \log_a\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right) = \log_a x_0$ folgt aus der Stetigkeit der Logarithmusfunktion.
3) Logarithmengesetze

Behauptung:

$$(\log_a x)' = \frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \mathrm{e} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Beweis:

Der Differenzenquotient der Logarithmusfunktion mit $f(x) = \log_a x$ ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0}{\Delta x},$$

wobei x_0 und $x_0 + \Delta x > 0$ sein müssen. Der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ kann nicht sofort erfolgen, weil dann der Ausdruck $\dfrac{0}{0}$ entsteht. Die Umformung erfolgt mit den Logarithmengesetzen, und so, daß wir die Folge $\left((1 + x)^{\frac{1}{x}}\right)$ erhalten, weil wir ihren Grenzwert kennen.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a \frac{x_0 + \Delta x}{x_0}$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right).$$

Erweitert man den Differenzenquotienten mit x_0 und wendet ein weiteres Logarithmengesetz an, so erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{x_0}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}.$$

Für jede beliebige feste Stelle $x_0 > 0$ kann jetzt der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durchgeführt werden, es folgt

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x_0} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x_0} \cdot \log_a e = \frac{1}{x_0 \cdot \ln a}$$

Da x_0 eine beliebige Zahl mit $x_0 > 0$ ist, gilt die Aussage für alle Zahlen x mit $x > 0$. w. z. b. w.

Für die oft verwendete logarithmische Funktion mit der Gleichung $f(x) = \log_e x = \ln x$ $(x > 0)$ erhält man wegen $\log_e e = 1$ die sehr einfache Ableitung

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Beispiele:

(1) $y = \ln (x^2 + 1)$;

Kettenregel: $y' = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$

(2) $y = \frac{\ln x}{x}$

Quotientenregel: $y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

39.4. Ableitung der Exponentialfunktion

Wie wir wissen, ist die Exponentialfunktion im gesamten Definitionsbereich eine eineindeutige Funktion. Sie hat die Funktionsgleichung $y = f(x) = a^x$ mit $a > 1$. Weil sie eine eineindeutige Funktion ist, können wir die zu f inverse Funktion $\bar{f}$ bilden.

Aus $y = f(x) = a^x$ folgt $x = \bar{f}(y) = \log_a y$.

Die Ableitung der Logarithmusfunktion kennen wir schon:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\bar{f}(y)}{dy}$$
$$= \frac{1}{y} \log_a e = \frac{1}{y \cdot \ln a}.$$

Deshalb ist

$$y' = f'(x)$$
$$= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{y} \cdot \log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y \cdot \ln a}}$$
$$= y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

■ *Satz:* $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a > 1)$

Für die in Naturwissenschaft und Technik viel verwendete Exponentialfunktion mit der Gleichung

$$f(x) = e^x \quad \text{folgt dann} \quad (e^x)' = e^x,$$

weil $\ln e = 1$ ist. Man erkennt, daß die Änderung der Exponentialfunktion an einer bestimmten Stelle der Funktion an dieser Stelle proportional ist.

Beispiele:

(1) $y = a^{-\lambda x}$,

Kettenregel: $y' = a^{-\lambda x} \cdot \ln a \cdot (-\lambda)$

$= -\lambda a^{-\lambda x} \cdot \ln a$.

(2) $y = e^{x^2}$,

Kettenregel: $y' = e^{x^2} \cdot 2x$

$= 2x \cdot e^{x^2}$.

Mit Hilfe der Ableitung der Exponentialfunktion ist es auch möglich nachzuweisen, daß die Formel zur Differentiation einer Potenzfunktion (Potenzregel) mit rationalen Exponenten auch für alle Potenzfunktionen f mit der Gleichung $y = x^r$, $x > 0$ und $r \in R$ gilt. Für jede positive reelle Zahl x gilt $x = e^{\ln x}$. Daraus folgt $x^r = (e^{\ln x})^r = e^{r \cdot \ln x}$ $(x > 0$ und $r \in R)$.
Mit der Kettenregel erhält man

$$(x^r)' = (e^{r \cdot \ln x})' = e^{r \cdot \ln x} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x} \quad (x > 0)$$
$$= r \cdot x^{r-1}.$$

Die Formel zur Differentiation einer Potenzfunktion (Potenzregel) mit rationalem Exponenten gilt demnach auch für alle Potenzfunktionen mit reellen Exponenten.

Beispiel einer Anwendung der Exponentialfunktion:
Für den Zerfall einer radioaktiven Substanz gilt das Zerfallgesetz $N = N_0 e^{-\lambda t}$ $(t \geqq 0)$.
Unter der Zerfallsgeschwindigkeit einer radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t versteht man die Ableitung

$$v(t) = \frac{dN}{dt} \quad \text{der Funktion} \quad N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Man erhält $v(t) = \frac{dN}{dt} = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = -\lambda N_0 \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda N$.
Die Zerfallsgeschwindigkeit $\frac{dN}{dt}$ ist also der Anzahl N der noch nicht umgewandelten Atomkerne proportional. Man kann deshalb das Zerfallgesetz auch in der Form $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ angeben.

39.5. Ableitungen der Winkelfunktionen

39.5.1. Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Bei der Umformung des Differenzenquotienten der Sinusfunktion erhalten wir den Quotienten $\frac{\sin x}{x}$, deshalb soll zuerst der Grenzwert dieses Quotienten für $x \to 0$ untersucht werden.
Da die Funktion f mit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ eine gerade Funktion ist:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x),$$

kann man sich darauf beschränken, die Funktion auf die Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes bei $x_0 = 0$ zu untersuchen. Es gilt dann $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.
Zur Berechnung von $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ betrachten wir in einem Kreis mit dem Radius r einen spitzen Winkel AOB.

Für die Flächeninhalte der Dreiecke DOB und AOC sowie des Kreissektors AOB gilt dann

$$A_{DOB} < A_{\text{Sektor}\,AOB} < A_{AOC}.$$

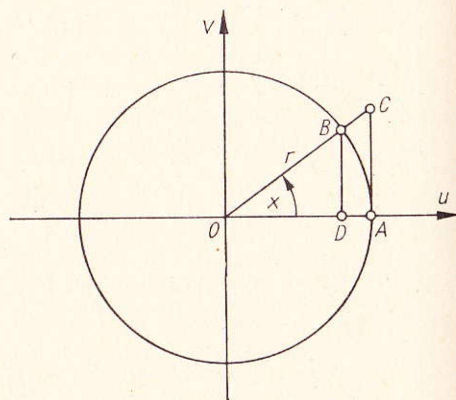


Abb. 39.1.

Wenn x das Bogenmaß von $\sphericalangle AOB \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ ist, so gilt $\frac{1}{2} r^2 \cdot \sin x \cdot \cos x < \frac{1}{2} r^2 \cdot x < \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$ und nach Division durch $\frac{1}{2} r^2$

$$\sin x \cdot \cos x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Da im betrachteten Intervall $\sin x > 0$ ist, führt die Division durch $\sin x$ auf $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Damit haben wir bei dieser Ungleichung schon den reziproken Wert des Quotienten $\frac{\sin x}{x}$ erhalten. In dem Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist $\cos x > 0$, deshalb können wir die reziproken Werte bilden und erhalten $\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.
Nun ist die Grenzwertbildung möglich:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \geqq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geqq \lim_{x \to 0} \cos x, \text{ also } 1 \geqq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geqq 1.$$

Aus dieser Ungleichung kann nur folgen

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

39.5.2. Beweis des Satzes über die Ableitungen der Winkelfunktionen

Für die Ableitungen der Winkelfunktionen gilt der folgende

■ *Satz:* Die Funktionen mit den Gleichungen $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$ sind an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar, und es gilt:

(1) $(\sin x)' = \cos x$ $\quad x \in R$
(2) $(\cos x)' = -\sin x$ $\quad x \in R$
(3) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad x \in R \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k \in G$
(4) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $\quad x \in R \setminus \{k\pi\};\ k \in G$

Beweis der Ableitung der Sinusfunktion

Voraussetzung:

a) Die Sinusfunktion ist in R stetig.
b) $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Behauptung:

$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R$

Beweis:

Es sei $x_0 \in R$.
Aufstellung des Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x}$$

Für $\Delta x \to 0$ erhält man den nicht definierten Ausdruck $\frac{0}{0}$, deshalb müssen wir die Differenz $\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$ umformen. Für die Umformung verwendet man das Additionstheorem (s. Voraussetzung b)):

$$\frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Grenzwertbildung des Differenzenquotienten:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$

(s. Voraussetzung c)). Da x_0 eine beliebige reelle Zahl ist, erhält man

$(\sin x)' = \cos x \quad \text{mit} \quad x \in R.$ w. z. b. w.

Beweis der Ableitung der Kosinusfunktion

Voraussetzung:

a) $(\sin x)' = \cos x$

b) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Behauptung:

$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R$

Beweis:

Aus den Voraussetzungen b) und c) und der Kettenregel in Verbindung mit der Voraussetzung a) folgt

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$ w. z. b. w.

Beweis der Ableitung der Tangensfunktion

Voraussetzung:

a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in G$

b) $(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$

c) Quotientenregel

Behauptung:

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in G$

Beweis:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \ k \in G$$

w. z. b. w.

Unter analogen Voraussetzungen und analogen Umformungen erhalten wir für die Ableitung der Kotangensfunktion:

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in G.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.
Oft werden die Ableitungen der Tangens- und Kotangensfunktion auch in der Form

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x, \quad x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in G$

$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x), \quad x \neq k\pi, \quad k \in G$

angegeben, deren Gültigkeit man durch einfache Umformung zeigen kann.

Beispiele:

(1) $(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cdot \cos 2x$

(2) $(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$

(3) $(\sin^2 x)' = [(\sin x)^2]' = 2\sin x \cdot \cos x$

(4) $[\cos(ax + b)]' = -\sin(ax + b) \cdot a = -a \cdot \sin(ax + b)$

(5) $(x \cdot \tan x)' = 1 \cdot \tan x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

39.6. Ableitungen der zyklometrischen Funktionen

(Die Ableitungen der Arcusfunktionen)

Es gilt der Satz:

■ Die zyklometrischen Funktionen mit den Gleichungen

$f(x) = \text{Arc}\sin x \qquad -1 \leqq x \leqq +1$

$f(x) = \text{Arc}\cos x \qquad -1 \leqq x \leqq +1$

$f(x) = \text{Arc}\tan x \qquad -\infty < x < +\infty$

$f(x) = \text{Arc}\cot x \qquad -\infty < x < +\infty$

sind differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\,\text{Arc}\sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < +1$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\text{Arc}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < +1$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\text{Arc}\tan x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\text{Arc}\cot x}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Beweis der Ableitung der Arcussinusfunktion

Da die Arcussinusfunktion die inverse Funktion zur Sinusfunktion ist, verwenden wir diese Tatsache beim Beweis.

Voraussetzung:

$y = f(x) = \text{Arc}\sin x;$

$x = \bar{f}(y) = \sin y$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Behauptung:

$$\frac{\mathrm{d}\,\text{Arc}\sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1;\ +1)$$

Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{mit} \quad x \in (-1;\ +1) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Beweis der Ableitung der Arcustangensfunktion

Voraussetzung:

$y = f(x) = \text{Arc}\tan x;$

$x = \bar{f}(y) = \tan y$

Behauptung:

$$\frac{\mathrm{d}\,\text{Arc}\tan x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R$$

Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Die Ableitungen von $f(x) = \text{Arc}\cos x$ und $f(x) = \text{Arc}\cot x$ erhält man analog.

Beispiele:

(1) $f(x) = \text{Arc}\sin 2x$ (Kettenregel anwenden!)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

(2) $f(x) = x^2 \cdot \text{Arc}\tan x$ (Produktregel anwenden!)

$$f'(x) = 2x \cdot \text{Arc}\tan x + x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2x \cdot \text{Arc}\tan x + \frac{x^2}{1+x^2}$$

39.7. Ableitungen höherer Ordnung

Wiederholen Sie den Begriff „Ableitung der Funktion f"! Die Ableitung f' einer Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Das bedeutet:

(1) f' ist in einer Umgebung von x_0 definiert und

(2) der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$ existiert.

Man nennt diesen Grenzwert „die Ableitung zweiter Ordnung" oder „die 2. Ableitung" von f an der Stelle x_0.

Man schreibt:

$y''|_{x=x_0}$ (gelesen: y zwei Strich an der Stelle x_0)

$f''(x_0)$ (gelesen: f zwei Strich an der Stelle x_0)

$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$ (gelesen: d zwei y nach dx Quadrat an der Stelle x_0)

Allgemein kann man für $n \geqq 2$ ($n \in N$) die Ableitung n-ter Ordnung (n-te Ableitung) einer Funktion f definieren durch

■ $$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = [f^{(n-1)}(x)]',$$

wenn die Funktion f und ihre Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung differenzierbar sind.

Die Ableitung f' einer Funktion nennt man auch 1. Ableitung.

Beispiele:

(1) Bilden Sie von der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x + 7$$

die Ableitungen bis zur 4. Ordnung!

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - \frac{3}{2}x - 1$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x - \frac{3}{2}$$

$$f'''(x) = 24x + 12$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

(2) Bilden Sie die 1., 2. und 3. Ableitung von

$$f(x) = x \cdot \sin x\,!$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cdot \cos x$$

$$f''(x) = \cos x + (1 \cdot \cos x - x \cdot \sin x) = 2\cos x - x \cdot \sin x$$

$$f'''(x) = -2\sin x - (\sin x + x \cdot \cos x) = -3\sin x - x \cdot \cos x$$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. In welchem Intervall ist die Wurzelfunktion mit der Gleichung $y = \sqrt[n]{x}$ differenzierbar?
2. Woran erkennt man, daß die Ableitungsregel für Potenzfunktionen auch für rationale Exponenten $\frac{1}{n}$ mit $n \in G^+$ gilt?
3. Wie nennt man Funktionen mit einer Gleichung der Form $y = f[g(x)]$?
4. Welche Funktion nennt man „äußere Funktion" und welche „innere Funktion" in $y = \ln^2 x = (\ln x)^2$?
5. Ist der Definitionsbereich der verketteten Funktion immer gleich dem Definitionsbereich der inneren Funktion?
6. Unter welchen Voraussetzungen ist eine mittelbare Funktion differenzierbar?
7. Wie lautet die Kettenregel?
8. Womit kann man die Kettenregel einfach beweisen?
9. Was versteht man unter der Proportionalität der Logarithmensysteme?
10. Welche Relation besteht zwischen $\log_b a$ und $\log_a b$ bzw. $\lg e$ und $\ln 10$?
11. Welchen Grenzwert hat die Folge $\left((1 + x)^{\frac{1}{x}}\right)$ für $x \to 0$?
12. Mit Hilfe welcher Gesetze formt man den Differenzenquotienten der Logarithmusfunktion um?
13. Welche Form soll der Differenzenquotient der Logarithmusfunktion erhalten, und warum soll er diese Form erhalten?
14. Für welche Logarithmen ergibt sich eine besonders einfache Ableitung?
15. Warum ist es möglich, zu der Exponentialfunktion mit der Gleichung $y = a^x$ $(a > 1)$ die inverse Funktion zu bilden?

16. Welche Funktion ist die inverse Funktion zur Exponentialfunktion?
17. Mit welcher Relation kann man die Ableitung der inversen Funktion finden?
18. Welche Exponentialfunktion wird oft in den Naturwissenschaften und in der Technik verwendet?
19. Wie kann man die Relation $(e^x)' = e^x$ analytisch und geometrisch interpretieren?
20. Welchen Grenzwert hat $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$?
21. Womit und warum formt man den Differenzenquotienten $\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ um?
22. Welche Voraussetzungen macht man beim Beweis der Ableitungen der Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktion, um nicht den Differenzenquotienten aufstellen und umformen zu müssen?
23. In welchen Intervallen sind die Winkelfunktionen differenzierbar?
24. Welche Eigenschaft der zyklometrischen Funktionen verwendet man bei der Herleitung ihrer Ableitungen?
25. In welchen Intervallen sind die zyklometrischen Funktionen differenzierbar?
26. Was muß für die Funktion f und ihre Ableitungen vorausgesetzt werden, wenn wir die Ableitung dritter Ordnung der Funktion f bilden wollen?

Aufgaben

1. Beweisen Sie, daß $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ gilt!

2. Durch welche Überlegungen erkennt man, daß die Ableitungsregel für Potenzfunktionen auch für die Wurzelfunktionen anwendbar ist?

3. Differenzieren Sie!

1. $y = \sqrt{x}$	4. $y = \sqrt[3]{x^2}$	7. $y = \sqrt{x^5}$
2. $y = \sqrt[5]{x^3}$	5. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	8. $y = \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$
3. $y = x \cdot \sqrt[3]{x}$	6. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$	

4. Wie bildet man $y = \sqrt{1 - x}$ $(x \leqq 1)$?

► Man bildet $y = \sqrt{1 - x}$ durch Verkettung von $f(z) = \sqrt{z}$ und $g(x) = 1 - x$.

Wie bildet man $y = (3x + 5)^4$, $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = [1 - \sqrt{1 + x^2}]^6$

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}},\quad y = \lg|\tan x|,\quad y = \sin\frac{x}{2},\quad y = e^{-x^2}\;?$$

5. Wie differenziert man $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$?

► Man differenziert $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ durch Anwendung der Kettenregel.

a) Wie differenziert man $f(x) = (x + 1)(x^2 - 4)$?

b) Wie differenziert man $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$?

c) Wie differenziert man $y = \sqrt{1 - x} \quad (x \leqq 1)$?

d) Wie differenziert man $y = \cos(2x - 3)$?

6. Erläutern Sie den Begriff „mittelbare Funktion“!

7. Wie bestimmt man den Definitionsbereich einer verketteten Funktion?

8. Verketten Sie folgende Funktionen!

$y = \sqrt{z}$ und $z = 4x$

► $y = \sqrt{4x}$

1. $y = \sqrt{z}$ und $z = x + 5$
2. $y = \sqrt[3]{z}$ und $z = \frac{1 - x}{x}$
3. $y = \sin z$ und $z = \frac{\pi}{2} - x$
4. $y = \frac{1 - z^2}{z^2}$ und $\cos x = z$
5. $y = \sqrt{z}$ und $z = \frac{x}{4} + 3$
6. $y = 3 + z,\ z = \sqrt{u}$ und $u = x - 2$
7. $y = \ln z,\ z = \cos u$ und $u = \frac{x}{2}$

9. Geben Sie die Gleichungen für die innere Funktion g und die äußere Funktion f an! Ermitteln Sie den Definitionsbereich der mittelbaren Funktion!

$y = \ln(x + 3)$

► innere Funktion g: $z = g(x) = x + 3$
äußere Funktion: $y = f(z) = \ln z$
Definitionsbereich: $y = \ln z \rightarrow z > 0$
$z = x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$

$x \in (-3;\ +\infty)$

1. $y = (x + 5)^2$
2. $y = \lg(2x + 5)$
3. $y = \sqrt{\cos x}$
4. $y = \sqrt{1 + x^2}$
5. $y = \lg|\tan x|$
6. $y = \cos\frac{\pi + x}{2}$

10. Differenzieren Sie!

1. $y = f(x) = (3x + 5)^4$
2. $y = f(x) = (2x^2 - 1)^{10}$
3. $y = f(x) = (x^2 - x + 1)^3$
4. $y = f(x) = (ax^2 + 6x + C)^2$
5. $y = f(x) = (x - 1)^2 (x^2 + 1)^2$
6. $y = f(x) = x^2 \cdot (4x^2 - 1)^3$
7. $y = f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x + 1}$
8. $y = f(x) = \frac{(x^2 + 4)^3}{(2 - x^3)^2}$
9. $y = f(x) = \frac{(2x + 1)(x - 1)^2}{(x^2 - 4)^2}$

11. Beweisen Sie folgenden Satz:
Ist g eine differenzierbare Funktion, die nur positive Funktionswerte hat, so gilt

$$(\sqrt{g(x)})' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Kettenregel!)

12. Differenzieren Sie folgende Funktionen mit Hilfe der Kettenregel!

1. $y = \sqrt{1 - x}$
2. $y = \sqrt{x^2 - a^2}$
3. $y = \left(1 - \sqrt{1 + x^2}\right)^6$
4. $y = \sqrt[3]{\frac{1 - x}{1 + x}}$
5. $y = \sqrt{9 - x^2}$
6. $y = x^3 \cdot \sqrt{x + 3}$
7. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$
8. $y = \frac{2x}{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$

13. Vergleichen Sie die Zahlenfolgen $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ für $n \rightarrow \infty$ $(n \in N \setminus \{0\})$, $\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)$ für $x \rightarrow +\infty$ $(x \in R)$ und $\left((1 + x)^{\frac{1}{x}}\right)$ für $x \rightarrow 0$ $(x \in R)$!

14. Beweisen Sie $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$!

15. Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die folgenden Funktionen differenzierbar sind, und bilden Sie die Ableitung!

1. $f(x) = \ln(1 + x)$
2. $f(x) = \ln^2 x$
3. $f(x) = \ln(\ln x)$
4. $f(x) = \log_a^2 x$
5. $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right)$
6. $f(x) = x \cdot \ln x$
7. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$
8. $f(x) = \log_a(\ln x)$

16. Beweisen Sie $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$!

17. Bilden Sie von den folgenden Funktionen die Ableitung!

1. $f(x) = e^x \cdot \ln x$
2. $f(x) = x^3 \cdot e^{3x} \cdot \ln(x^2)$
3. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
4. $f(x) = 3^x$
5. $f(x) = \dfrac{x^5}{e^x}$
6. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
7. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
8. $f(x) = (x^3 + 3) \cdot 2^{-7x}$

18. Wie kann man zeigen, daß die Formel für die Ableitung einer Potenzfunktion mit rationalem Exponenten auch für Potenzfunktionen anwendbar ist, deren Exponent eine reelle Zahl ist?

19. Führen Sie die Beweise für die Ableitungen der Potenzfunktionen mit $y = x^r$ für

1. $r \in G^+ \wedge r \geqq 2$,
2. $r \in G^- \cup \{0\}$,
3. $r \in K$ und
4. $r \in R$!

20. Sprechen Sie über den Zerfall einer radioaktiven Substanz!

a) Geben Sie das Zerfallsgesetz an!
b) Berechnen Sie die Zerfallsgeschwindigkeit!
c) Berechnen Sie die Halbwertszeit! (Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Atomkerne zerfallen, $N = \dfrac{N_0}{2}$?)

21. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Tangente an den Graph der folgenden Funktionen mit der Richtung der positiven x-Achse an den angegebenen Stellen bildet!

1. $y = f(x) = \sqrt{x}$ für $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$
2. $y = f(x) = \sqrt{x + 1}$ für $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$
3. $y = f(x) = \ln x$ für $x_1 = 1$ und $x_2 = \dfrac{1}{2}$
4. $y = f(x) = e^x$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$
5. $y = f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{x}{3}}$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 9$

22. Beweisen Sie die Ableitungen der Winkelfunktionen!

23. Unter welchem Winkel schneiden einander

1. die Bilder der Sinus- und Kosinusfunktion,
2. das Bild der Sinusfunktion und die Abszissenachse im Koordinatenursprung,
3. die Bilder der Tangens- und Kotangensfunktion,
4. das Bild der Tangensfunktion und die Abszissenachse im Koordinatenursprung?

24. Bilden Sie von den folgenden Funktionen die Ableitung!

1. $f(x) = 2 \cdot \sin x$
2. $f(x) = \sin(x + 2)$
3. $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$
4. $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
5. $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$
6. $f(x) = \sin\sqrt{x}$
7. $f(x) = \ln \cos x^2$
8. $f(x) = e^{\tan x}$
9. $f(x) = 2^{\sin x}$
10. $f(x) = \sin 2x$
11. $f(x) = \sin(2 - x)$
12. $f(x) = 2 \cdot \cos 2x$
13. $f(x) = \cos^2 x$
14. $f(x) = \sqrt{\sin x}$
15. $f(x) = \tan^2 x$
16. $f(x) = e^x \cdot \sin x$
17. $f(x) = e^{x \cdot \cos x}$

25. Geben Sie die Definitionsbereiche der zyklometrischen Funktionen an!

26. Geben Sie die Intervalle an, in denen die zyklometrischen Funktionen differenzierbar sind!

27. Differenzieren Sie!

1. $y = \operatorname{Arc\,sin} 2x$
2. $y = x^2 \cdot \operatorname{Arc\,tan} x$
3. $y = \dfrac{\operatorname{Arc\,sin} x}{\operatorname{Arc\,cos} x}$
4. $y = \operatorname{Arc\,cos} \dfrac{1}{x}$
5. $y = \operatorname{Arc\,sin}(1 - x)$
6. $y = \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

28. Lesen Sie!

y''; y'''; $y^{(4)}$; $y^{(5)}|_{x=x_1}$; $x^{(m)}$;
$f'(x_0)$; $f''(x)$; $f^{(4)}(x_1)$; $f^{(k)}(x)$;
$\dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}$; $\left.\dfrac{d^4y}{dx^4}\right|_{x=x_0}$; $\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$!

29. Bilden Sie die erste, zweite und dritte Ableitung folgender Funktionen!

1. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x + 18$
2. $f(x) = \dfrac{x^5}{10} - 3x^4 + \dfrac{x^2}{8} - 6$
3. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
5. $f(x) = \sin^2 x$
6. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
7. $f(x) = 5x^3 - 8x^2 + 12$
8. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - 3x$
9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x + 5}$
10. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
11. $f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x$
12. $f(x) = x \cdot e^x$

30. Bilden Sie $y'' + y$ für die folgenden Funktionen!
1. $y = \sin x$; 2. $y = a \cdot \sin x$; 3. $y = \sin(ax)$ mit $a \in R^+$.
Geben Sie in allen Fällen den Koeffizienten k an, mit dessen Hilfe die Summe $y'' + ky$ gleich Null wird!

31. Berechnen Sie die Funktionswerte der Funktionen und ihrer 1. und 2. Ableitungen an den angegebenen Stellen!

1. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x; \quad x = 2$
2. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}; \quad x = 0$
3. $f(x) = 2 \cdot \sin(2x); \quad x = \frac{\pi}{2}$

32. Es ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades zu bestimmen, von der bekannt sind

1. $f(0) = 2,\ f'(0) = -5,\ f''(0) = 16,\ f'''(x) = 6;$
2. $f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 3,\ f''(1) = 12;$
3. $f(1) = -6,\ f'(2) = 1,\ f''(3) = -8,\ f'''(x) = -6;$
4. $f(2) = -21,\ f'(3) = 13,\ f''(4) = 36,\ f''(6) = 60.$

Anleitung: Man schreibt die ganzrationale Funktion dritten Grades in der Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Wenn man die erste, zweite und dritte Ableitung bildet, so erhält man zusammen mit der Funktionsgleichung ein Gleichungssystem von 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten, das man mit Hilfe der gegebenen Werte lösen kann, d. h., man berechnet die Koeffizienten a, b, c und d.

Beispiel:

Von der ganzrationalen Funktion dritten Grades sind gegeben: $f(0) = 0$; $f'(-2) = 0; f''(0) = 0; f'''(x) = \frac{3}{2}$.

Ansatz:
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$
$$f'''(x) = 6a$$

Einsetzen:
$$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$$
$$f'(-2) = 3a \cdot (-2)^2 + 2b \cdot -2) + c = 0$$
$$f''(0) = 6a \cdot 0 + 2b = 0$$
$$f'''(x) = 6a = \frac{3}{2}$$

Gleichungssystem:
$$d = 0$$
$$12a - 4b + c = 0$$
$$2b = 0$$
$$6a = \frac{3}{2}$$

Daraus folgt sofort: $d = 0$ und $b = 0$
$$a = \frac{1}{4}.$$

Durch Einsetzen folgt für c: $12 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot 0 + c = 0$
$$c = -3$$

Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$

40. Zwei besondere Verfahren der Differentiation

40.1. Differentiation einer Funktion, deren Funktionsgleichung in der impliziten Form gegeben ist

Wir haben die Ableitung einer Funktion immer nur dann gebildet, wenn die Funktionsgleichung in der expliziten Form gegeben war. Die Funktionsgleichung einer Funktion kann aber auch in der impliziten Form gegeben sein. Auch dann ist es möglich, die Ableitung einer Funktion zu bilden, wenn man die Existenz der Differenzierbarkeit der Funktion in der expliziten Form der Funktionsgleichung voraussetzt.

Man differenziert beide Seiten der Gleichung und beachtet, daß die abhängige Variable y eine Funktion von x ist. Das bedeutet, daß man die Kettenregel anwenden muß.

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion f durch ihre Funktionsgleichung in impliziter Form:

$$y^2 - x = 2 \quad (x \geqq -2; y \geqq 0)$$

Wie groß ist der Anstieg des Graphen an der Stelle $x_0 = -1$?

$$y^2 - x = 2$$
$$2y \cdot y' - 1 = 0 \qquad \text{weil } y = f(x) \text{ ist,}$$
$$y' = \frac{1}{2y} \qquad \text{gilt } (y^2)' = [f(x)^2]'$$
$$= 2 \cdot (f(x)) \cdot f'(x)$$
$$= 2yy'$$

Für $x_0 = -1$ gilt: $y^2 - (-1) = 2$
$$y_0^2 = 1$$
$$|y_0| = 1$$
$$y_{01} = +1$$
$$y_{02} = -1 \quad (\text{entfällt, weil } y \geqq 0 \text{ sein soll})$$
$$y'|_{y_0=+1} = \frac{1}{2 \cdot (+1)} = \frac{1}{2}$$

Der gesuchte Anstieg ist $m = \frac{1}{2}$.

In diesem Falle ist es möglich, die Funktion f in expliziter Form zu schreiben: $y = \sqrt{x+2}$.

Die entsprechende Differentiation führt zum gleichen Ergebnis.

40.2. Differentiation nach Logarithmieren

(Die Ableitung von $y = [f(x)]^{g(x)}$ mit $f(x) > 0$)

Für Funktionen mit Funktionsgleichungen der Form $y = [f(x)]^{g(x)}$ mit $f(x) > 0$, bei denen die unabhängige Variable in der Basis und im Exponenten vorkommt, haben wir keine Regel gelernt. Die Potenzregel ist nicht anwendbar, weil der Exponent nicht konstant ist. Analoges gilt für die Ableitung der Exponentialfunktion, denn hier müßte die Basis eine Konstante sein. Also suchen wir nach einer neuen Möglichkeit des Differenzierens. Wenn man beide Seiten der Gleichung (z. B. mit natürlichen Logarithmen) logarithmiert, so kann man die rechte Seite der Gleichung als Produkt schreiben und dann die Gleichung differenzieren.

Beispiele:

(1) $y = (\sin x)^{x^2} \quad x \in (0; 2\pi)$ | logarithmieren

$\ln y = \ln (\sin x)^{x^2}$

$\ln y = x^2 \cdot \ln (\sin x)$ | differenzieren

$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x \cdot \ln \sin x + x^2 \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$

$y' = y \cdot x(2 \ln \sin x + x \cdot \cot x)$

$y' = x \cdot (\sin x)^{x^2} \cdot (2 \cdot \ln \sin x + x \cdot \cot x)$

(2) $y = \sqrt[x]{x}, \quad x > 0$ | logarithmieren

$\ln y = \ln \sqrt[x]{x} = \frac{1}{x} \cdot \ln x$ | differenzieren

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y' = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie nennt man die Form einer Funktionsgleichung, die nicht nach der abhängigen Variablen aufgelöst ist?
2. Warum muß man bei der Differentiation einer Funktion in der impliziten Form auf die abhängige Variable die Kettenregel anwenden?
3. Warum setzt man in $y = [f(x)]^{g(x)}$ voraus, daß $f(x) > 0$ ist?
4. Warum sind Potenzregel und Ableitung der Exponentialfunktion auf $y = [f(x)]^{g(x)}$ nicht anwendbar?
5. Weshalb logarithmieren wir die Gleichung $y = (\sin x)^{x^2}$, wenn wir die Ableitung bilden wollen?

Aufgaben

1. Differenzieren Sie!
   1. $x^2 + y^2 = 25 \qquad y \geqq 0$
   2. $x^2 - y^2 = 1 \qquad y \geqq 0$
   3. $2x^2 - 3x + y^2 - 6 = 0 \qquad y \geqq 0$
   4. $y^2 = 4x + 8 \qquad y \geqq 0$
   5. $\sqrt{y} - 2x + 9 = 0 \qquad y \geqq 0$
2. Berechnen Sie den Anstieg der Tangente an den Graph mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ im Punkt $P_1(3; 4)$!
3. Bestimmen Sie den Anstieg der Kurve $y^2 = 2px$ im Punkt $P_0(x_0; y_0)$! (P_0 liegt auf der Kurve)
4. Welchen Anstieg hat die Tangente an die Kurve

   $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 - 100 = 0$

   im Punkt P_0 mit der Abszisse $x_0 = -2$ und $y_0 > 10$?
5. Bilden Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen!
   1. $f(x) = x^x$
   2. $f(x) = x^{\ln x}$
   3. $f(x) = x^{\sin x}$
   4. $f(x) = (2x - 4)^{5x}$

41. Anwendungen der Differentialrechnung

41.1. Monotonie

Wir haben die Monotonie einer Funktion f mit $y = f(x)$ in einem Intervall $[a; b]$ definiert, aber keine praktikable Methode kennengelernt, um die Monotonie (das Steigen oder Fallen einer Kurve) einer Funktion f zu bestimmen. Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man das Verhalten einer Funktion f an einer Stelle x_0 einfach untersuchen. Es gilt folgender Satz:

■ Wenn eine Funktion f mit $y = f(x)$ in x_0 differenzierbar ist und $f'(x_0) > 0$ bzw. $f'(x_0) < 0$ gilt, so ist f an der Stelle x_0 wachsend bzw. fallend.

Dieser Satz ergibt sich daraus, daß $f'(x_0)$ gleich dem Anstieg $\tan \alpha$ der Tangente an den Graphen von f in x_0 ist.
Für $f'(x_0) > 0$ ist der Winkel α spitz, für $f'(x_0) < 0$ ist der Winkel α stumpf.

■ *Satz:* Wenn eine Funktion f mit $y = f(x)$ in jedem Punkt eines Intervalls $(a; b)$ differenzierbar ist und $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für jedes $x \in (a; b)$ gilt, so ist die Funktion f im Intervall $(a; b)$ monoton wachsend bzw. monoton fallend.

Damit ist es möglich, das Steigen oder Fallen einer differenzierbaren Funktion f an einer Stelle und in einem Intervall zu bestimmen.

Beispiele:

(1) Das Verhalten (Steigen oder Fallen) der Kurve der Funktion f mit $y = x^2 - 6x + 8$ soll an der Stelle $x_0 = 2$ untersucht werden.
a) Bildung der 1. Ableitung: $f'(x) = 2x - 6$
b) Berechnung des Funktionswertes der Ableitung an der Stelle $x_0 = 2$: $f'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$.
Da $f'(x_0) < 0$ ist, ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 2$ fallend.

(2) Die Intervalle, in denen die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 6x + 8$ monoton wachsend bzw. monoton fallend ist, sollen bestimmt werden.
a) Bildung der 1. Ableitung: $f'(x) = 2x - 6$
b) Monoton wachsend für alle x mit $f'(x) > 0$, d. h., $2x - 6 > 0$. Aus $2x - 6 > 0$ folgt $x > 3$.
c) Monoton fallend für alle x mit $f'(x) < 0$, d. h., $2x - 6 < 0$. Aus $2x - 6 < 0$ folgt $x < 3$.
Die Funktion f ist im Intervall $(-\infty; 3)$ monoton fallend und im Intervall $(3; +\infty)$ monoton steigend.

41.2. Relative Extrema

41.2.1. Begriff des relativen Extremums

Bei der Untersuchung von Funktionen, ganz besonders bei der graphischen Darstellung, haben die Stellen eine besondere Bedeutung, an denen die Funktionswerte in einer Umgebung dieser Stelle einen größten oder kleinsten Wert annehmen. Man nennt diese Funktionswerte relative Extrema.
Die Abbildung zeigt das Bild einer Funktion, die im Intervall $[a; b]$ definiert ist und die an den Stellen x_1 bis x_3 und a und b relative Extrema hat. An den Stellen x_1 und x_3 befinden sich relative Maxima und an den Stellen x_2, a und b relative Minima.

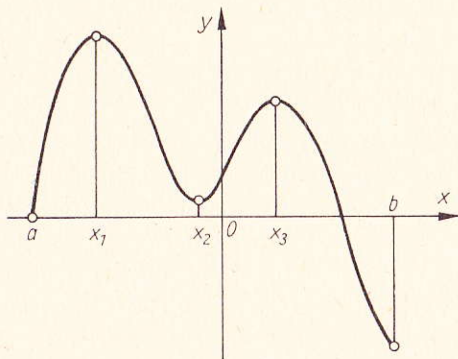


Abb. 41.1. Relative Extrema

Den größten bzw. kleinsten Funktionswert im Definitionsbereich nennt man ein absolutes Extremum.

Das absolute Maximum (Minimum) einer stetigen Funktion f im Intervall $[a; b]$ kann auch einer der Funktionswerte $f(a)$ oder $f(b)$ sein. Zum Beispiel ist $f(b)$ in der Abbildung ein absolutes Minimum.
Wir wollen nun nach der anschaulichen Erklärung den Begriff der relativen Extrema exakt definieren.

▶ **Def.:** Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum bzw. relatives Minimum genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für jedes x mit $x \neq x_0$ und $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ gilt:

$f(x) < f(x_0)$ bzw. $f(x) > f(x_0)$.

Anmerkung: Das Intervall $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ heißt eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0.

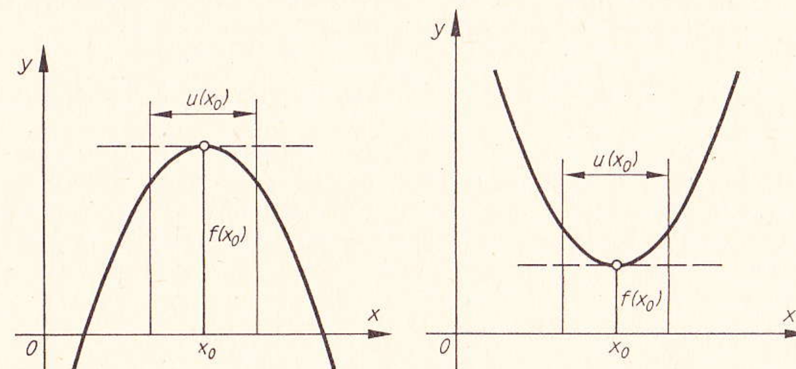


Abb. 14.2. Relatives Maximum und relatives Minimum

41.2.2. Eine notwendige Bedingung für relative Extrema

Nachdem wir festgelegt haben, was unter einem relativen Extremum zu verstehen ist, wollen wir eine Methode kennenlernen, wie mit Hilfe der Differentialrechnung die Extremstellen berechnet werden können. Es gibt dafür eine notwendige Bedingung, die man leicht anwenden kann. Es gilt folgender

■ *Satz:* Wenn eine Funktion f in x_0 differenzierbar ist und in x_0 ein relatives Extremum hat, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Die geometrische Bedeutung dieses Satzes:
Hat eine in x_0 differenzierbare Funktion f in x_0 ein relatives Extremum, so hat die Tangente an das Bild der Funktion f an dieser Stelle den Anstieg $m_t = 0$, d. h., sie verläuft parallel zur x-Achse.

Beweis des Satzes o. B. d. A. für ein relatives Minimum:

Voraussetzung:

(1) f sei in x_0 differenzierbar
(2) $f(x_0)$ sei ein relatives Minimum von f, d. h., für $h \neq 0$ und $x_0 + h \in U(x_0)$ gilt $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$.

Behauptung:

$f'(x_0) = 0$

Beweis:

Der Differenzenquotient $D(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ist positiv für $h > 0$ und negativ für $h < 0$. Daraus ergibt sich aber $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} D(h) \geqq 0$ und $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} D(h) \leqq 0$. Da nach Voraussetzung die Funktion f in x_0 differenzierbar ist, müssen rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten übereinstimmen. Das ist aber nur der Fall, wenn $f'(x_0) = 0$ ist.

w. z. b. w.

Der Beweis dafür, daß $f(x_0)$ ein relatives Maximum ist, kann entsprechend geführt werden.
Der Satz über die relativen Extrema hat die Form einer Implikation. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung und keine hinreichende Bedingung für die Existenz eines relativen Extremums. Die Umkehrung des Satzes ergibt eine falsche Aussage. Das zeigt das Beispiel der Funktion f mit $f(x) = x^3$. An der Stelle $x_0 = 0$ ist die 1. Ableitung $f'(0) = 0$, aber an dieser Stelle gibt es keinen Extremwert.

Beispiele:

(1) An welchen Stellen kann die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ Extremwerte haben?
Wenn Extremwerte vorliegen sollen, so ist notwendig, daß die 1. Ableitung an diesen Stellen null ist. Man bildet die 1. Ableitung $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$. Dann muß man die Gleichung $\frac{3}{4}x^2 - 3 = 0$ lösen. Wir erhalten als Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = +2$. An den Stellen x_1 und x_2 kann die Funktion Extremwerte haben.

(2) An welchen Stellen können für die Sinusfunktion $y = \sin x$ Extremwerte vorliegen?
Da $y' = \cos x$ ist, müssen wir die Gleichung $\cos x = 0$ lösen. Die Nullstellen der Kosinusfunktion sind $x_k = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ mit $k \in G$.
Wie wir schon wissen, liegen an diesen Stellen der Sinusfunktion tatsächlich Extremwerte vor.

41.2.3. Eine hinreichende Bedingung für relative Extrema

$f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines relativen Extremums an der Stelle x_0. Es gibt auch eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums.

■ *Satz:* Es sei f eine an der Stelle x_0 zweimal differenzierbare Funktion. Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ ist, so hat f in x_0 ein relatives Extremum, und zwar für $f''(x_0) < 0$ ein relatives Maximum bzw. für $f''(x_0) > 0$ ein relatives Minimum.

Dieser Satz ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, so ist die Tangente an den Graphen von f parallel zur x-Achse.
Wenn außerdem $f''(x_0) < 0$ ist, so fällt der Graph der Ableitung f' in x_0, d. h. $f'(x)$ geht bei x_0 vom Positiven zum Negativen über. Das bedeutet aber, daß die Funktion f links von x_0 steigen und rechts von x_0 fallen muß. f hat also in x_0 ein Maximum.
Für $f''(x_0) > 0$ geht $f'(x)$ bei x_0 vom Negativen zum Positiven über, f hat also in x_0 ein Minimum.
Der Satz gibt eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für das Vorhandensein relativer Extrema, d. h., eine Funktion f kann auch dann ein relatives Extremum haben, wenn die Bedingungen des Satzes nicht erfüllt sind.
So hat $f(x) = x^4$ an der Stelle 0 ein relatives Minimum, obwohl $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$ sind.

■ *Zusammenfassung:*
Es sei f eine in x_0 zweimal differenzierbare Funktion. Damit f in x_0 einen relativen Extremwert annimmt, ist notwendig (aber nicht hinreichend):
$f'(x_0) = 0$.
Hinreichend (aber nicht notwendig) für ein Minimum ist
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$
und für ein Maximum
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.
Im Falle $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ kann auf diesem Wege keine Aussage gemacht werden.

Beispiel:

Bestimmen Sie die Minima und Maxima der Sinusfunktion im Intervall $[-\pi; 2\pi]$:
(Wir wählen als Beispiel die Sinusfunktion, weil wir die Winkelfunktionen und ihre Graphen gut kennen.)
1. Wir bilden die 1. und 2. Ableitung von $y = \sin x$!
$y' = \cos x$
$y'' = -\sin x$
2. Wir lösen die Gleichung $f'(x) = \cos x = 0$. Die Lösungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ sind: $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}\pi$.

3. Wir setzen x_1, x_2 und x_3 in die 2. Ableitung ein und berechnen die Funktionswerte $f''(x_i)$ mit $i = 1, 2, 3$.

$$f''(x_1) = -\sin x_1 = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 > 0$$

$$f''(x_2) = -\sin x_2 = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0$$

$$f''(x_3) = -\sin x_3 = -\sin\frac{3}{2}\pi = 1 > 0$$

Es ist also:

$f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$, daraus folgt, daß $y = \sin x$ an der Stelle $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ ein Minimum annimmt: $P_1\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$.

$f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) < 0$, daraus folgt, daß $y = \sin x$ an der Stelle $x_2 = \frac{\pi}{2}$ ein Maximum annimmt: $P_2\left(\frac{\pi}{2}; +1\right)$.

$f'(x_3) = 0$ und $f''(x_3) > 0$, daraus folgt, daß $y = \sin x$ an der Stelle $x_3 = \frac{3}{2}\pi$ ein Minimum annimmt: $P_3\left(\frac{3}{2}\pi; -1\right)$.

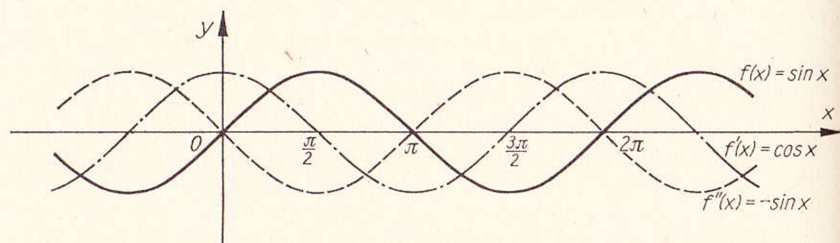


Abb. 41.3. Extrema der Sinusfunktion

41.3. Wendepunkte

Oft bestimmt man beim Graph einer Funktion f noch einen charakteristischen Punkt, den Wendepunkt.

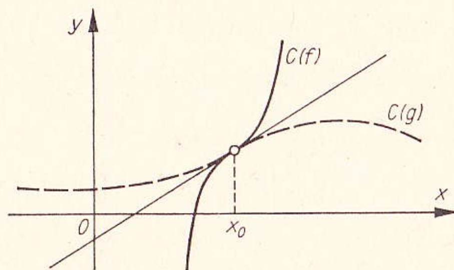


Abb. 41.4. Wendepunkt

Für den Graph $C(f)$ einer Funktion f bedeutet das: Wenn f in x_0 einen Wendepunkt hat, dann wird der Graph von f im Punkt $P_{Wp}(x_0; f(x_0))$ von der Tangente „durchsetzt". Das heißt, für $x < x_0$ verläuft der Graph unterhalb (bzw. oberhalb) und für $x > x_0$ oberhalb (bzw. unterhalb) der Tangente.
Als Bedingung für Wendepunkte gilt der Satz:

■ Es sei f in x_0 dreimal differenzierbar. Damit f in x_0 einen Wendepunkt hat, ist notwendig (aber nicht hinreichend):

$$f''(x_0) = 0.$$

Hinreichend (aber nicht notwendig) ist

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0.$$

Diesen Satz können wir nur anschaulich erläutern. Wir sehen auf unserer Abbildung, daß der Anstieg von f immer kleiner wird, wenn wir uns x_0 von links nähern. Rechts von x_0 wird der Anstieg von f wieder größer. Daher hat der Anstieg von f, das ist f', bei x_0 ein Minimum. Also gilt:

$$(f'(x_0))' = 0 \quad \text{und} \quad (f'(x_0))'' > 0.$$

In anderer Form geschrieben folgt: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Analoge Überlegungen gelten für die Funktion g.

Beispiele:

Wir bestimmen nun die Wendepunkte der Sinusfunktion im Intervall $(-\pi; 2\pi)$.

1. Wir bilden die 1., 2. und 3. Ableitung der Sinusfunktion:

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\sin x)'' = -\sin x$$
$$(\sin x)''' = -\cos x.$$

2. Wir lösen die Gleichung $(\sin x)'' = -\sin x = 0$ und erhalten die Lösungen $x_4 = 0$ und $x_5 = \pi$.

3. Wir setzen x_4 und x_5 in die 3. Ableitung ein:

$$-\cos x_4 = -\cos 0 = -1 \neq 0$$
$$-\cos x_5 = -\cos\pi = 1 \neq 0.$$

Daraus folgt, daß die Sinusfunktion $y = \sin x$ an den Stellen $x_4 = 0$ und $x_5 = \pi$ Wendepunkte hat. Die Wendepunkte sind $P_4(0; 0)$ und $P_5(\pi; 0)$.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Was kann man über das Verhalten einer Funktion f mit $y = f(x)$ an der Stelle x_0 sagen, wenn $f'(x_0) > 0$ bzw. $f'(x_0) < 0$ gilt?
2. Was versteht man unter einem relativen Extremum?
3. Vergleichen Sie die Begriffe relatives und absolutes Extremum!

4. Nennen Sie die Bedingungen, unter denen die Ungleichung $f(x) > f(x_0)$ für ein relatives Minimum gilt!
5. Welche geometrische Bedeutung hat der Satz:
   Wenn eine Funktion f in x_0 differenzierbar ist und in x_0 ein relatives Extremum hat, so gilt $f'(x_0) = 0$.
6. Warum ist die Bedingung $f'(x_0) = 0$ für das Vorliegen eines relativen Extremums eine notwendige und keine hinreichende Bedingung?
7. Nennen Sie die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines relativen Maximums bzw. relativen Minimums!
8. Die Funktion f habe an der Stelle x_0 ein relatives Maximum bzw. Minimum. Wie wechselt die 1. Ableitung f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen bei wachsendem x?
9. Nennen Sie die notwendige Bedingung und die hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines relativen Maximums bzw. Minimums an der Stelle x_0!
10. Welche Eigenschaft hat eine Tangente im Wendepunkt eines Graphen?
11. Kann eine Funktion f an der Stelle x_1 einen Wendepunkt haben, wenn $f''(x_1) \neq 0$ gilt?

Aufgaben

1. Welchen Funktionswert nimmt die Funktion f an der Stelle x_0 bzw. im Intervall $(a; b)$ an?

Beispiel: f mit $f(x) = x^2 \,/\, x_0 = -2$

► Die Funktion f mit $f(x) = x^2$ nimmt an der Stelle $x_0 = -2$ den Funktionswert $f(-2) = 4$ an.

1. f mit $f(x) = x - 2 \,/\, x_0 = 2$
2. f mit $f(x) = e^x \,/\, x_0 = 0$
3. f mit $f(x) = \ln x \,/\, x_0 = 1$
4. f mit $f(x) = \cos x \,/\, x_0 = \pi$
5. f mit $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \,/\, x_0 = -3$
6. f mit $f(x) = 2 \cdot \sin 5x \,/\, x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

Beispiel: $(0; +\infty) \,/\, f$ mit $f(x) = x^2$

► Im Intervall $(0; +\infty)$ nimmt die Funktion f mit $f(x) = x^2$ nur positive Funktionswerte an.

7. $(-\infty; +\infty) \,/\, f$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
8. $(-\infty; 0) \,/\, f$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$
9. $(-\infty; +\infty) \,/\, f$ mit $f(x) = e^x$
10. $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \,/\, f$ mit $f(x) = \cos x$
11. $(0; 1) \,/\, f$ mit $f(x) = \ln x$
12. $(1; +\infty) \,/\, f$ mit $f(x) = \ln x$

2. Was liegt an den Stellen $x_0 = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3}{2}\pi, 2\pi$ für die Sinusfuktion mit $y = f(x) = \sin x$ vor?
Verwenden Sie in der Antwort: Nullstelle, relatives Extremum, relatives Maximum, relatives Minimum, Wendepunkt.

► An der Stelle $x_0 = 0$ liegt für die Sinusfunktion eine Nullstelle vor.

3. Beweisen Sie den Satz:
Wenn f mit $y = f(x)$ in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) < 0$ ist, so ist f in x_0 fallend.

4. Beweisen Sie den Satz:
f sei in x_0 differenzierbar. Wenn f in x_0 ein relatives Maximum hat, so gilt $f'(x_0) = 0$.

5. Zeigen Sie an den Funktionen mit den Gleichungen $y = f(x) = x^4$ und $y = f(x) = x^5$, daß die Bedingungen für Wendepunkte notwendig (aber nicht hinreichend) bzw. hinreichend (aber nicht notwendig) sind!

6. Zeichnen Sie das Bild der Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$, ihrer 1. Ableitung f' und ihrer 2. Ableitung f'' im Intervall $-4 \leqq x \leqq +2$!

7. Skizzieren Sie die Graphen der Ableitungen!

1. Gegeben ist $C(f)$ einer Funktion f. Skizzieren Sie $C(f')$ und $C(f'')$! Verwenden Sie dabei die geometrische Bedeutung der Ableitung einer Funktion!
2. Skizzieren Sie zur Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = \cos x$ die Graphen $C(f)$, $C(f')$, $C(f'')$!

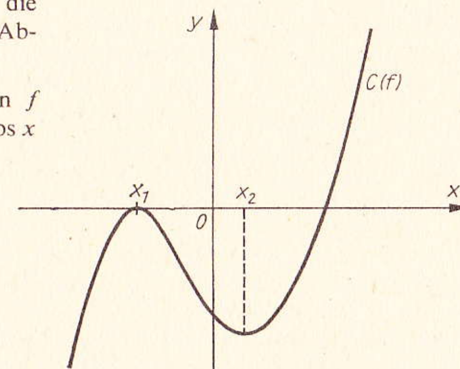


Abb. 41.5.
Graph $C(f)$ einer Funktion f

8. Ist es möglich, daß eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen relativen Extremwert hat, wenn f in x_0 nicht differenzierbar ist? (Verwenden Sie als Beispiel die Funktion mit $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$!)

9. Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die relativen Extremwerte! (Bestimmen Sie zuerst x_E und dann $f(x_E)$)!

1. $f(x) = x^3 - x - 2$
2. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
3. $f(x) = 30 - 24x + 9x^2 - x^3$
4. $f(x) = 2 \cdot \sin x + \sin 2x$

5. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$
6. $f(x) = x \cdot e^x$
7. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
8. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2}$
9. $f(x) = \sin^2 x$
10. $f(x) = x \cdot \ln x$
11. $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$
12. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1}$

10. Bestimmen Sie die Abszisse des Scheitels der Parabel $y = x^2 + px + q$!

11. Bestimmen Sie von den Funktionen der Aufgaben 9.1. bis 9.7. die Wendepunkte!

12. Welche Aussagen lassen sich über die Anzahl der relativen Extremwerte und über die Anzahl der Wendepunkte einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades machen?

13. Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^3 + bx$ $(a > 0)$. Für welche b ist die gegebene Funktion im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend?

14. 1. Unter welchem Winkel schneidet das Bild von $y = \frac{1}{4}(x^3 - 4x)$ den positiven Teil der x-Achse?

2. Ermitteln Sie diejenigen Punkte des Bildes von $y = \frac{1}{4}(x^3 - 4x)$, in denen der Anstiegswinkel 45° beträgt!

15. Die Flugbahn eines Geschosses kann bei vereinfachten Bedingungen durch folgende Funktion beschrieben werden: $y = f(x) = k \cdot (135x - 6x^2 - x^3)$. Dabei geben x die horizontale Entfernung vom Abschußpunkt A und y die

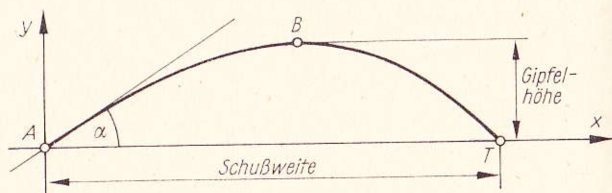


Abb. 41.6.

zugeordnete Geschoßhöhe über der Horizontalebene an. Die Koordinateneinheit ist für beide Achsen 1 km. Abschußpunkt A und Auftreffpunkt T liegen in derselben Horizontalebene.

1. Berechnen Sie die Schußweite $\overline{AT}$!
2. Berechnen Sie die Koordinaten des Gipfelpunktes B der Geschoßbahn, wenn $k = \frac{1}{200}$ ist!
3. Bestimmen Sie den Abschußwinkel α für $k = \frac{1}{200}$!
4. Wie groß muß k sein, damit die Gipfelhöhe 1,5 km beträgt?

42. Kurvendiskussion

■ Unter einer Kurvendiskussion versteht man das Bestimmen charakteristischer Merkmale einer gegebenen Funktion (Definitionsbereich, Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse, Stetigkeit, Monotonie, Verhalten im Unendlichen, gerade bzw. ungerade Funktion, relative Extremwerte, Wendepunkte und Untersuchung an den Polstellen) und die graphische Darstellung der Funktion mit Hilfe der Kenntnisse dieser Merkmale.

Einige Beispiele sollen die Methode der Kurvendiskussion erläutern.

Beispiel 1

Gegeben sei die ganzrationale Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch!

Definitionsbereich:

Da f eine ganzrationale Funktion ist, ist die Menge R der Definitionsbereich von f: $D(f) = R$.

Nullstellen:

Aus $f(x_i) = 0$ folgt, daß die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{1}{4}x^3 - 3x = 0$ gesucht wird. $x(\frac{1}{4}x^2 - 3) = 0$ ergibt $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{12} \approx 3{,}46$, $x_3 = -\sqrt{12} \approx -3{,}46$.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$y_S = f(0) = 0$, also $P_S(0; 0)$.

Stetigkeit:

Als ganzrationale Funktion ist f im gesamten Definitionsbereich stetig. Es gibt keine Unstetigkeitsstellen.

Monotonie:

Wir bestimmen mit Hilfe der 1. Ableitung von f die Intervalle, in denen f monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$

Monoton wachsend: Aus $\frac{3}{4}x^2 - 3 > 0$ folgt $x^2 - 4 > 0$ und $x^2 > 4$. $|x| > 2$ ergibt die Intervalle $(-\infty; -2)$ und $(2; +\infty)$. Monoton fallend: Man erhält analog $x^2 < 4$. $|x| < 2$ ergibt das Intervall $(-2; +2)$.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{1}{4}x^3 - 3x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{x^2}\right] = \pm\infty$$

Gerade bzw. ungerade Funktion:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \tfrac{1}{4}(-x)^3 - 3(-x) \\ &= -\tfrac{1}{4}x^3 + 3x \\ &= -(\tfrac{1}{4}x^3 - 3x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Da $f(-x) = -f(x)$ gilt, ist f eine ungerade Funktion, und der Graph ist zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Relative Extremwerte:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ ergibt $\frac{3}{4}x^2 - 3 = 0$, und daraus folgt $x_4 = 2$ und $x_5 = -2$.
Hinreichende Bedingung: $f'(x_4) = 0$ und $f''(x_4) = \frac{3}{2} \cdot 2 > 0$ bedeutet, daß an der Stelle $x_4 = 2$ ein Minimum vorliegt.
$f'(x_5) = 0$ und $f''(x_5) = \frac{3}{2} \cdot (-2) < 0$ bedeutet, daß f an der Stelle $x_5 = -2$ ein Maximum annimmt.

Minimum: $f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4$, $P_4(2; -4)$

Maximum: $f(-2) = 4$, $P_5(-2; 4)$

Wendepunkte:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2}$$

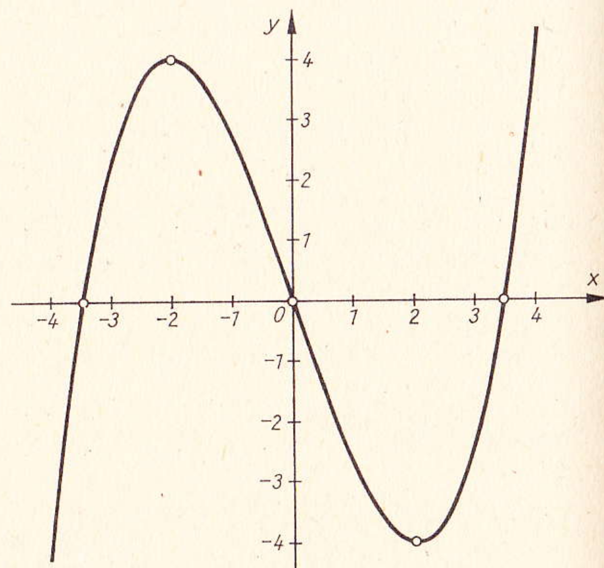


Abb. 42.1. Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}x = 0$, also $x_6 = 0$.
Hinreichende Bedingung: $f''(x_6) = 0$ und $f'''(x_6) = \frac{3}{2} \neq 0$, d. h., an der Stelle $x_6 = 0$ hat f einen Wendepunkt.
Wendepunkt: $f(x_6) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$, $P_6(0; 0)$.

Beispiel 2

Gegeben sei die gebrochenrationale Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.
Führen Sie eine Kurvendiskussion durch!

Definitionsbereich:
Da der Nenner an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ null wird, ist die Funktion f an diesen Stellen nicht definiert. $D(f) = R \setminus \{-2; +2\}$.

Nullstellen:
Die Funktion f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ hat Nullstellen, wenn $u(x_0) = 0$ und $v(x_0) \neq 0$ ist. Aus $u(x) = x^2 - 1 = 0$ folgt $x_3 = -1$ und $x_4 = +1$. $v(x)$ ist an diesen Stellen ungleich null, also sind $x_3 = -1$ und $x_4 = +1$ Nullstellen von f.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$y_S = f(0) = \frac{1}{4}, \quad \text{also} \quad P_S\left(0; \frac{1}{4}\right).$$

Stetigkeit:
An den Stellen, an denen die Funktion f nicht definiert ist, ist sie auch nicht stetig. Die Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ sind Unstetigkeitsstellen, und da für x_1 und x_2 die Funktion u ungleich null ist, liegen für x_1 und x_2 Pole vor.

Monotonie:
Wir bilden die 1. Ableitung von $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 4) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}$$

Monoton wachsend: $\frac{-6x}{(x^2 - 4)^2} > 0$ für $x < 0$, da der Nenner für alle $x \in R \setminus \{-2; +2\}$ positiv ist. An der Stelle $x_1 = -2$ ist f nicht definiert, deshalb erhalten wir die Intervalle $(-\infty; -2)$ und $(-2; 0)$.
Monoton fallend: Da der Nenner für alle $x \in R \setminus \{-2; +2\}$ positiv ist, wird $f'(x)$ für $x > 0$ kleiner als null.
Analog erhalten wir die Intervalle $(0; 2)$ und $(2; +\infty)$.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = 1$$

Das bedeutet, daß die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ eine Asymptote ist.

Gerade bzw. ungerade Funktion:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = f(x)$$

Da $f(-x) = f(x)$ gilt, ist f eine gerade Funktion, und der Graph liegt axialsymmetrisch zur y-Achse.

Relative Extremwerte:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \quad \text{mit} \quad x \neq \pm 2$$

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2} \quad \text{mit} \quad x \neq \pm 2$$

$$f''(x) = \frac{18x^2 + 24}{(x^2 - 4)^3} \quad \text{mit} \quad x \neq \pm 2$$

Die 1. Ableitung wird nur null für $x_5 = 0$. An der Stelle $x_5 = 0$ ist die 2. Ableitung $f''(0) = \frac{24}{-64} < 0$. Deshalb nimmt f an der Stelle $x_5 = 0$ ein relatives Maximum an.

Maximum: $f(0) = \frac{0^2 - 1}{0^2 - 4} = \frac{1}{4}, \quad P_5\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Wendepunkte:

Da die 2. Ableitung f'' für kein Element x ($x \neq \pm 2$) null wird, d. h., die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes nicht erfüllt ist, kann die Funktion f keinen Wendepunkt haben.

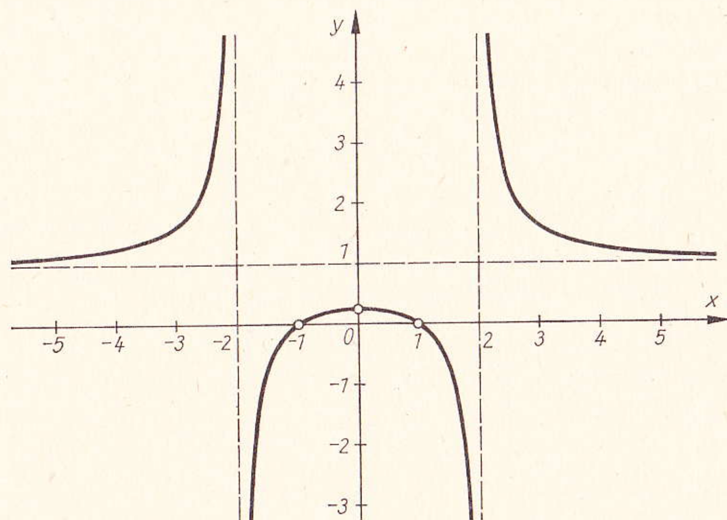


Abb. 42.2. Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Untersuchung an den Polstellen:

Da f eine gerade Funktion ist, untersuchen wir nur die Polstelle $x_2 = 2$. Wir wählen in einer Umgebung von $x_2 = 2$ $x = 2 + \varepsilon$ bzw. $x = 2 - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ und $\{\varepsilon\} \to 0$.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(2 + \varepsilon)^2 - 1}{(2 + \varepsilon)^2 - 4} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}{4\varepsilon + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{3}{\varepsilon} + 4 + \varepsilon}{4 + \varepsilon} = +\infty$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(2 - \varepsilon)^2 - 1}{(2 - \varepsilon)^2 - 4} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3 - 4\varepsilon + \varepsilon^2}{-4\varepsilon + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{3}{\varepsilon} - 4 + \varepsilon}{-4 + \varepsilon} = -\infty$$

Ergebnis:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = -\infty$$

Beispiel 3

Diskutieren Sie die Funktion f mit der Gleichung

$f(x) = \sin x + \cos x$!

Die Winkelfunktionen sind periodische Funktionen, deshalb können wir uns bei der Untersuchung auf das Intervall der (primitiven) Periode beschränken. Wir untersuchen also zuerst die

Periodizität:

Da die Sinus- und Kosinusfunktion die primitive Periode $\omega_p = 2\pi$ haben, gilt

$$f(x + 2k\pi) = \sin(x + 2k\pi) + \cos(x + 2k\pi)$$
$$= \sin x + \cos x = f(x).$$

Die zu diskutierende Funktion f hat also auch die Periode $\omega_p = 2\pi$. Wir untersuchen deshalb f im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Definitionsbereich:

Da die Sinus- und Kosinusfunktion für jedes $x \in R$ definiert sind, gilt auch für f: $D(f) = R$.

Nullstellen:

Aus der Bedingung $f(x) = 0$ folgt die zu lösende Gleichung $\sin x + \cos x = 0$. Man erhält im Intervall $[0; 2\pi]$

$$x_1 = \frac{3}{4}\pi \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{7}{4}\pi.$$

Stetigkeit:

Wir wissen, daß die Sinus- und Kosinusfunktion im gesamten Definitionsbereich stetig sind, deshalb auch die Funktion f.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1$, also $P_5(0; 1)$.

Relative Extremwerte:

$f(x) = \sin x + \cos x$
$f'(x) = \cos x - \sin x$
$f''(x) = -\sin x - \cos x = -f(x)$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = \cos x - \sin x = 0$ bzw. $\sin x = \cos x$. Die Sinus- und Kosinusfunktion können nur im 1. und 3. Quadranten gleiche Funktionswerte haben, da sie dort das gleiche Vorzeichen haben.

Man erhält $x_3 = \frac{\pi}{4}$ und $x_4 = \frac{5}{4}\pi$.

Hinreichende Bedingung:

$$f'(x_3) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_3) = -f(x_3) = -\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0.$$

An der Stelle $x_3 = \frac{\pi}{4}$ nimmt f ein Maximum an.

$$f'(x_4) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_4) = -\left(\sin\frac{5}{4}\pi + \cos\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2} > 0.$$

An der Stelle $x_4 = \frac{5}{4}\pi$ nimmt f ein Minimum an.

Maximum: $P_3\left(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$ bzw. $P_3(0{,}78; 1{,}41)$.

Minimum: $P_4\left(\frac{5}{4}\pi; -\sqrt{2}\right)$ bzw. $P_4(3{,}92; -1{,}41)$.

Wendepunkte:

$f(x) = \sin x + \cos x$
$f'(x) = \cos x - \sin x$
$f''(x) = -\sin x - \cos x = -f(x)$
$f'''(x) = -\cos x + \sin x = -f'(x)$

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$. Da $f''(x) = -f(x)$ gilt, sind die Nullstellen von f auch Nullstellen von f''.

$$x_5 = x_1 = \frac{3}{4}\pi \quad \text{und} \quad x_6 = x_2 = \frac{7}{4}\pi.$$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(x_5) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_5) = -\cos\frac{3}{4}\pi + \sin\frac{3}{4}\pi = -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} \neq 0.$$

Da die hinreichende Bedingung erfüllt ist, existiert an der Nullstelle $x_1 = \frac{3}{4}\pi$ ein Wendepunkt. $P_5(2{,}36; 0)$. Ebenso gilt $f''(x_6) = 0$ und $f'''(x_6) \neq 0$. $P_6(5{,}49; 0)$.

Monotonie:

Monoton wachsend: $f'(x) = \cos x - \sin x > 0$.
Die Intervalle für x, die sich aus der Ungleichung $\cos x > \sin x$ ergeben (in $0 \leqq x \leqq 2\pi$), findet man sehr schnell aus dem Graph der beiden Funktionen.

Man erhält $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ und $x \in \left(\frac{5}{4}\pi; 2\pi\right)$.

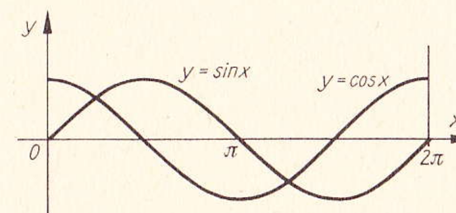


Abb. 42.3. Graph der Sinus- und Kosinusfunktion im Intervall $[0; 2\pi]$

Monoton fallend: Aus $f'(x) = \cos x - \sin x < 0$ folgt $\cos x < \sin x$. Das ergibt das Intervall $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi\right)$.

Ergebnis: Die Funktion f mit $f(x) = \sin x + \cos x$
$x \in [0; 2\pi]$ ist in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{4}$ und $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$ monoton wachsend und im Intervall $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$ monoton fallend.

Den Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \sin x + \cos x$ kann man mit Hilfe der berechneten Punkte leicht darstellen. Man könnte ihn auch zeichnen, indem man Punkt für Punkt die Funktionswerte der Sinus- und Kosinusfunktion addiert (graphisch oder arithmetisch).

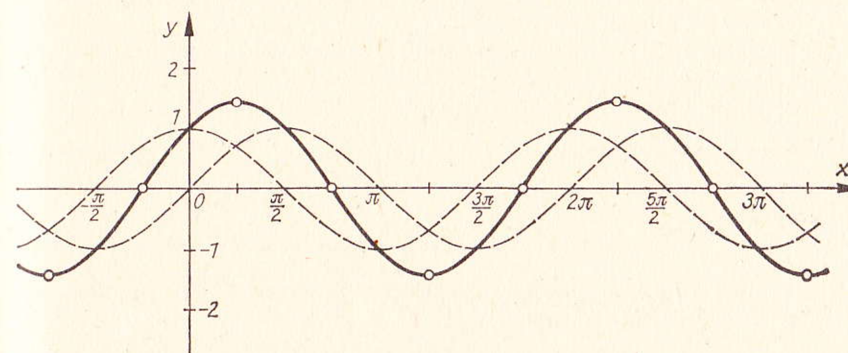


Abb. 42.4. Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin x + \cos x$

Beispiel 4

Führen Sie für die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Kurvendiskussion durch!

Definitionsbereich:

Die Funktion f ist für alle reellen x definiert: $D(f) = R$.

Nullstellen:

Die Bedingung $f(x) = 0$ ergibt $x_0 = 0$, da e^x für alle $x \in R$ ungleich null ist. x_0 ist eine doppelte Nullstelle.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$y_S = f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0$, also $P_S(0; 0)$.

Stetigkeit:

Die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$ ist im gesamten Definitionsbereich stetig. Es gibt keine Unstetigkeitsstellen.

Monotonie:

$f(x) = x^2 \cdot e^x$
$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$
Monoton wachsend: $f'(x) = e^x(2x + x^2) > 0$.

Da $e^x > 0$ für $x \in R$ ist, müssen wir nur den Faktor $(2x + x^2)$ untersuchen. Wir schreiben $2x + x^2 = x(2 + x)$. Das Produkt $x(2 + x)$ ist positiv, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind. Wir unterscheiden zwei Fälle:
1) $x > 0$ und $2 + x > 0$ ergibt $x > 0$ und $x > -2$.
Daraus erhält man das Intervall $(0; +\infty) \cap (-2; +\infty) = (0; +\infty)$.
2) $x < 0$ und $2 + x < 0$ ergibt $x < 0$ und $x < -2$.
Daraus erhält man das Intervall $(-\infty; 0) \cap (-\infty; -2) = (-\infty; -2)$.
Ergebnis: Die Funktion f wächst monoton in den Intervallen $-\infty < x < -2$ und $0 < x < +\infty$.
Monoton fallend: $f'(x) < 0$.
Da $e^x > 0$ gilt, muß $x(2 + x) < 0$ sein. Auch hier unterscheiden wir zwei Fälle:
1) $x > 0$ und $2 + x < 0$ bzw. $x < -2$. Das ergibt das Intervall $(0; +\infty) \cap (-\infty; -2) = \emptyset$.
2) $x < 0$ und $2 + x > 0$ bzw. $x > -2$. Hier erhält man das Intervall $(-\infty; 0) \cap (-2; +\infty) = (-2; 0)$.
Ergebnis: f fällt monoton im Intervall $-2 < x < 0$.

Verhalten im Unendlichen:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^x = 0$, denn die Exponentialfunktion strebt stärker gegen null als die Potenzfunktion gegen unendlich. (In diesem Fall kann man auch einige Funktionswerte berechnen, z. B.

$f(-5) = (-5)^2 \cdot e^{-5} = 25 \cdot 0{,}0067 \approx 0{,}167$;
$f(-10) = 100 \cdot e^{-10} \approx 0{,}0045$.

Relative Extremwerte:

$f(x) = x^2 \cdot e^x$
$f'(x) = e^x(2x + x^2)$
$f''(x) = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$.

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ führt auf die Gleichung $e^x(2x + x^2) = 0$
Da $e^x \neq 0$ ist, folgt aus $2x + x^2 = 0$

$x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

Hinreichende Bedingung:

$f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) = e^0(0^2 + 4 \cdot 0 + 2) = 2 > 0$.

An der Stelle $x_1 = 0$ nimmt die Funktion f ein relatives Minimum an.

$f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) = e^{-2}((-2)^2 + 4(-2) + 2)$
$= -2 \cdot e^{-2} < 0$.

An der Stelle $x_2 = -2$ nimmt die Funktion f ein relatives Maximum an.

Minimum: $f(0) = 0$, $P_1(0; 0)$.
Maximum: $f(-2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0{,}54$, $P_2(-2; 0{,}54)$.

Wendepunkte:

$f(x) = x^2 \cdot e^x$
$f'(x) = e^x(2x + x^2)$
$f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$
$f'''(x) = e^x(x^2 + 6x + 6)$.

Notwendige Bedingung: Aus $e^x(x^2 + 4x + 2) = 0$ folgt

$x_3 = -2 - \sqrt{2} \approx -3{,}41$ und $x_4 = -2 + \sqrt{2} \approx -0{,}59$.

Hinreichende Bedingung: Da $f'''(x_3) \neq 0$ und $f'''(x_4) \neq 0$ sind, liegen an den Stellen x_3 und x_4 Wendepunkte vor.
Man erhält $P_3(-3{,}41; 0{,}38)$ und $P_4(-0{,}59; 0{,}19)$.

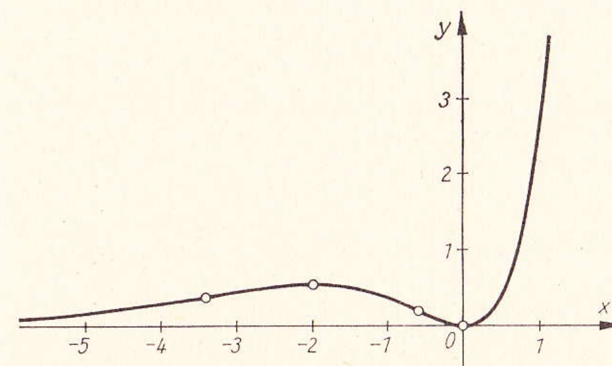


Abb. 42.5. Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einer Kurvendiskussion?
2. Welche charakteristischen Merkmale untersucht man bei einer Kurvendiskussion?
3. Wie führt man die Untersuchung an Polstellen einer gebrochenrationalen Funktion durch?
4. Weshalb ist es möglich, bei Winkelfunktionen die Untersuchung auf das Intervall der primitiven Periode zu beschränken?
5. Wie führt man mit Hilfe der 1. Ableitung einer Funktion f die Monotonie-Untersuchung durch?

Aufgaben

1. Führen Sie von den ganzrationalen Funktionen mit folgenden Gleichungen eine Kurvendiskussion durch!

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 8$
3. $f(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 3x^2 - 24x + 26)$
4. $f(x) = (x^2 - 6x + 8)(x + 1)$
5. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$
6. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$
7. $f(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15$
8. $f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{10}x^4$
9. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

2. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^4}{32} - \frac{3x^2}{4} + 5$.

1. Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrema und der Wendepunkte!
2. Weisen Sie nach, daß das Bild der Funktion nur im 1. und 2. Quadranten liegt, indem Sie zeigen, daß f keine Nullstellen hat!
3. Berechnen Sie den Anstieg in den Wendepunkten!

3. Beweisen Sie, daß jede Funktion f mit

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $a, b, c, d \in R, \quad a \neq 0$

mindestens einen Wendepunkt besitzen muß!

4. Führen Sie von den gebrochenrationalen Funktionen mit folgenden Gleichungen eine Kurvendiskussion durch!

1. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x^2}$
2. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$
3. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$
4. $f(x) = \frac{3}{4 - x^2}$
5. $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1}$
6. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 22}{x - 2}$
7. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{2x}$
8. $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$

5. Untersuchen Sie mit einer Kurvendiskussion die folgenden nichtrationalen Funktionen!

1. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$
2. $f(x) = \sin^2 x$
3. $f(x) = x \cdot \ln x$
4. $f(x) = x \cdot e^x$
5. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
6. $f(x) = \sin 3x$
7. $f(x) = 2 \cdot \sin 2x + \sin 4x$
8. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
9. $f(x) = \frac{x}{e^x}$
10. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x + 5}$

43. Extremwertaufgaben

Eine besondere Anwendung der Differentialrechnung sind die sogenannten Extremwertaufgaben, bei denen auch wieder relative Extremwerte zu suchen sind. An einigen Beispielen soll der Begriff Extremwertaufgabe erläutert werden. Lesen Sie folgende Aufgaben:

1. Die Zahl 100 soll man so in zwei Summanden zerlegen, daß deren Produkt ein Maximum wird.
2. Welche Maße muß ein Rechteck haben, das man in einen Halbkreis mit dem Radius r einzeichnet, damit die Fläche des Rechtecks so groß wie möglich wird?
3. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sollen zusammen 18 cm lang sein. Wie muß man ihre Längen wählen, damit die Hypotenuse so klein wie möglich wird?

Wenn man die Aufgaben analysiert, so stellt man folgende Gemeinsamkeiten fest:

1) Bei allen Aufgaben wären unendlich viele Lösungen möglich, wenn man die Forderung nach dem Extremum nicht beachtet. (Zum Beispiel bei der 1. Aufgabe: $100 = 10 + 90$; $100 = 50 + 50$; $100 = 23{,}7 + 76{,}3$ oder bei der 3. Aufgabe: $18 = 10 + 8$; $18 = 3{,}25 + 14{,}75$; $18 = 9 + 9$.)

2) Von diesen unendlich vielen Möglichkeiten muß man eine extreme – eine minimale oder eine maximale – auswählen.

Aufgaben dieser Art nennt man Extremwertaufgaben.
Wie löst man eine Extremwertaufgabe?
Wenn wir eine Funktion von nur einer Variablen hätten, so könnten wir von dieser Funktion die relativen Extrema bestimmen, denn das haben wir schon gelernt. Untersuchen wir am Beispiel der 1. Aufgabe, ob wir eine solche Funktion aufstellen können.
Welche Größe soll ein Extremum werden? Das Produkt $P = a \cdot b$, wobei a und b die beiden Summanden der Zahl 100 sind. $P = a \cdot b$ ist eine Funktion

$P = p(a; b)$ der beiden Variablen a und b mit $0 \leqq a \leqq 100$ und $0 \leqq b \leqq 100$. Wenn wir die Aufgabe mit den gelernten Methoden lösen wollen, müssen wir P als eine Funktion von nur einer Variablen darstellen. Aus der Aufgabe wissen wir, daß $a + b = 100$ ist, also $a = 100 - b$. Die Gleichung $a + b = 100$ nennt man eine Nebenbedingung für diese Extremwertaufgabe. Nun können wir $a = 100 - b$ in die Funktion p einsetzen und erhalten P als Funktion einer Variablen, der Variablen b. $P = p(b) = (100 - b)\,b$. Diese Funktion untersuchen wir auf relative Extrema.

$$P = p(b) = (100 - b)\,b = 100b - b^2$$
$$\frac{dP}{db} = p'(b) = 100 - 2b$$
$$p''(b) = -2$$

Notwendige Bedingung: $p'(b) = 100 - 2b = 0$ ergibt $b = 50$.

Hinreichende Bedingung: $p'(50) = 0$ und $p''(50) = -2 < 0$.

Für $b = 50$ liegt ein relatives Maximum vor. Es ist $b = 50 \in D(p)$ und $a = 100 - b = 100 - 50 = 50 \in D(p)$. Für $a = 50$ und $b = 50$ wird das Produkt aus den beiden Summanden a und b ein Maximum, d. h., die Summanden müssen gleich groß sein. Die maximale Größe des Produkts P ist $50 \cdot 50 = 2500$. Jede andere Zerlegung führt zu einem kleineren Produkt.
Auf Grund der Überlegungen zu dieser Aufgabe kommt man zu folgender

Handlungsanweisung für das Lösen von Extremwertaufgaben:

(Bei vielen Aufgaben ist es günstig, von einer Skizze auszugehen.)

1. Fertigen Sie eine Skizze an, und stellen Sie eine Funktion (Formel) für die Größe auf, die einen Extremwert annehmen soll!
2. Stellen Sie diese Größe mit Hilfe der Nebenbedingungen als eine Funktion von einer Variablen dar!
3. Bestimmen Sie die Stelle, an der die Funktion einen relativen Extremwert hat! Bestimmen Sie die Art des Extremums!
4. Berechnen Sie die noch fehlenden Angaben, und geben Sie die Antwort auf die Frage in der Aufgabe!
5. Überprüfen Sie an einigen Beispielen die Antwort!

Extremwertaufgaben spielen in Technik und Ökonomie eine große Rolle. Wir können nur einige einfache Beispiele betrachten. Kompliziertere Probleme löst man mit Hilfe von Computern.

Beispiel: (siehe 3. Aufgabe)

(1) Die Hypotenuse soll einen Extremwert annehmen.

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad 0 < a < 18 \quad \text{und} \quad 0 < b < 18$$
$$c = h(a; b) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(2) Nebenbedingung: $a + b = 18$, $b = 18 - a$

$$c^2 = a^2 + (18 - a)^2$$
$$c = h(a) = \sqrt{a^2 + (18 - a)^2} \quad \text{mit} \quad 0 < a < 18.$$

(3) Um das Differenzieren zu vereinfachen, muß man nicht die Funktion h differenzieren, sondern man kann auch h^2 ableiten. Die Funktion h^2 hat die Extrema an den gleichen Stellen wie die Funktion h, denn h hat im Definitionsbereich nur positive Funktionswerte.

$$c^2 = h^2(a) = a^2 + (18 - a)^2$$
$$\frac{d(c^2)}{da} = 2a + 2(18 - a)(-1) = 4a - 36$$
$$\frac{d^2(c^2)}{da^2} = 4$$

Aus $\frac{d(c^2)}{da} = 0$ folgt $4a - 36 = 0$ und $a = 9 \in D(h)$.

Da $\left.\frac{d^2(c^2)}{da^2}\right|_{a=9} = 4 > 0$ ist, liegt für $a = 9$ ein relatives Minimum vor.

(4) $b = 18 - a = 18 - 9 = 9 \in D(h)$

Für $a = 9$ cm und $b = 9$ cm wird die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks ein Minimum, d. h., von allen rechtwinkligen Dreiecken hat das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck die kleinste Hypotenuse.

(5) Die minimale Größe der Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks beträgt $c = \sqrt{9^2\,\text{cm}^2 + 9^2\,\text{cm}^2} = \sqrt{162\,\text{cm}^2} \approx 12{,}7$ cm.
Für jede andere Kombination von a und b wird die Hypotenuse länger, z. B. $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = \sqrt{164}$ cm $\approx 12{,}8$ cm oder $a = 3{,}25$ cm, $b = 14{,}75$ cm, $c \approx \sqrt{228}$ cm $\approx 15{,}1$ cm.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welche Gemeinsamkeiten haben alle Extremwertaufgaben?
2. Wie löst man eine Extremwertaufgabe? (Handlungsanweisung!)
3. Wozu benötigt man die Nebenbedingung?

Aufgaben

1. Eine natürliche Zahl ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß
a) das Produkt der Summanden,
b) die Summe der Quadrate der Summanden,
c) die Summe der dritten Potenzen der Summanden ein Extremum wird.
Untersuchen Sie, ob in den einzelnen Fällen ein Maximum oder ein Minimum sinnvoll ist!

2. Aus einem Baumstamm (der überall einen gleich großen kreisförmigen Querschnitt hat) soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit geschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional der Balkenbreite und dem Quadrat der Balkenhöhe. In welchem Verhältnis müssen Breite und Höhe des Balkens stehen?

3. Für die Herstellung einer oben offenen Konservendose stehen 300 cm² Blech zur Verfügung. Wie groß sind Radius und Höhe, wenn das Volumen ein Maximum sein soll?

4. Welche Maße muß man für allseitig geschlossene zylindrische Blechdosen von a) 1 l; b) 0,5 l; c) 0,25 l Inhalt wählen, wenn der Blechverbrauch möglichst gering sein soll? Ändert sich das Ergebnis, wenn die Dosen oben offen sind?

5. Aus einem quadratischen Stück Blech mit der Seitenlänge $2a$ soll ein oben offener Kasten mit möglichst großem Volumen hergestellt werden. Zu diesem Zweck müssen an den Ecken des Blechs Quadrate mit der Seitenlänge x abgeschnitten werden.
Wie lang muß x sein?

6. Ein Wasserbehälter besteht aus einem auf der Spitze stehenden Kegel mit aufgesetztem Kreiszylinder. Die Höhe des Zylinders soll eine Länge von 2,00 m und die Mantellinie des Kreiskegels eine Länge von 6,00 m haben. Welches Fassungsvermögen ist im Höchstfall möglich?

7. Welche Form müßte ein Trichter haben, wenn er beim Filtrieren optimale Wirkung, d. h. bei gegebenem Volumen die größtmögliche Filterfläche, haben soll?

8. Von einem Punkt A ausgehend, treffe ein Lichtstrahl auf den Spiegel S und werde dort nach B reflektiert. Das Licht schlägt dabei stets denjenigen Weg ein, auf dem es in kürzester Zeit von A über S nach B gelangt.
Weisen Sie die Beziehung nach, die zwischen dem Einfallswinkel und dem Reflektionswinkel am Spiegel besteht!

9. Von den Punkten A und B mögen ein Fischerboot und ein Motorboot gleichzeitig abfahren. Ihre Geschwindigkeiten sind $v_{\text{Fi.}} = 24$ km/h, $v_{\text{Mo.}} = 40$ km/h. Nach welcher Zeit ist der Abstand zwischen ihnen am geringsten, wenn $\overline{AB} = 1{,}450$ km beträgt, wenn das Fischerboot von A nach B fährt und das Motorboot senkrecht zu $\overline{AB}$ von B abfährt?

10. Ein auf waagerechter Ebene liegender Körper mit dem Gewicht $\boldsymbol{G}$ und dem Reibungskoeffizienten μ soll durch eine Kraft $\boldsymbol{F}$ bewegt werden, die mit der Ebene den Winkel φ bildet. Für welchen Winkel φ wird die Kraft ein Minimum?

11. Auf einer geneigten Ebene von der Länge l soll eine Kugel hinabrollen und sich dann waagerecht weiterbewegen. Welchen Neigungswinkel muß die geneigte Ebene haben, damit die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Waagerechten am Ende der geneigten Ebene am größten ist? (Die Reibung soll unberücksichtigt bleiben.)

12. Vier gleich breite Blechstreifen sollen so zu einer Rinne zusammengeschweißt werden, daß die Durchflußmenge ein Maximum wird. Wie groß ist der Winkel φ zu wählen?

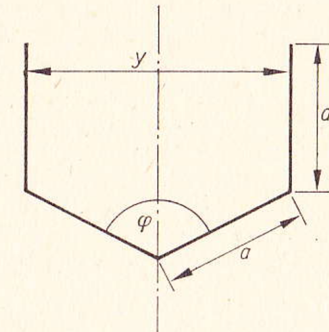


Abb. 43.1.

13. Der Querschnitt eines zu bauenden Bewässerungskanals soll die Form eines gleichschenkligen Trapezes haben. Welchen Winkel φ müssen die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden, damit das Fassungsvermögen des Kanals ein Maximum wird? Die Breiten der vom Wasser benetzten (berührten) Flächen haben die in der Abbildung angegebenen Maße.

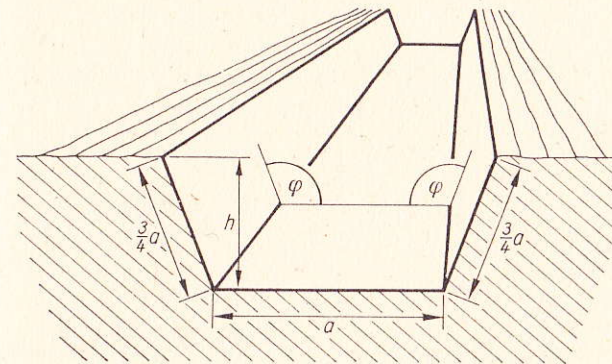


Abb. 43.2.

Zusatzaufgabe: Berechnen Sie die Sohlenbreite a und die Tiefe h des Kanals, wenn die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers 0,5 m/s beträgt und 120 m³ Wasser pro Minute durch den Kanal fließen sollen!

Integralrechnung

44. Die unbestimmte Integration

44.1. Begriff der Stammfunktion einer stetigen Funktion f

Die Funktionsgleichungen für die Ableitungen einer analytisch darstellbaren Funktion findet man mit Hilfe der Differentiationsregeln.
Sehr oft hat man aber bei wissenschaftlichen und technischen Untersuchungen auch das umgekehrte Problem zur Differentiation zu lösen. Das ist die Aufgabe, eine Funktion zu bestimmen, deren erste Ableitung gegeben ist.
Diese Aufgabe muß man beispielsweise lösen, wenn man die Gleichung $v = v(t)$ der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion einer Bewegung kennt und daraus die Gleichung $s = s(t)$ der Weg-Zeit-Funktion dieser Bewegung bestimmen soll.

► **Def.:** Eine Funktion Φ heißt eine Stammfunktion einer gegebenen analytisch darstellbaren Funktion f genau dann, wenn die Funktion f die erste Ableitung der Funktion Φ ist, also:
Φ Stammfunktion von $f \leftrightarrow \Phi' = f$.

Die Gleichung $[\Phi(x)]' = f(x)$ hat die gleiche Form wie eine Differentiationsregel. Daraus folgt, daß man für einige Funktionen die Stammfunktionen mit Hilfe der Differentiationsregeln sofort bestimmen kann.

Beispiel:

Wenn die Funktion f die Gleichung $y = f(x) = x^2$ hat, so erfüllt die Funktion F mit der Gleichung $y = F(x) = \frac{1}{3}x^3$ die Bedingung $F' = f$, d. h., es gilt $[\frac{1}{3}x^3]' = x^2$. F ist deshalb eine Stammfunktion von f. Da aber nicht nur die Funktion F, sondern auch jede Funktion Φ mit $y = \Phi(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ (mit $C \in R$) die erste Ableitung f mit $y = f(x) = x^2$ hat, muß es zu einer gegebenen Funktion f unendlich viele Stammfunktionen geben.

Man kann beweisen, daß sich die Terme $\Phi(x)$ der expliziten Funktionsgleichungen zweier beliebiger Stammfunktionen einer Funktion f nur durch einen konstanten Summanden voneinander unterscheiden, wie an dem Beispiel zu erkennen ist. Die Menge aller Stammfunktionen einer gegebenen Funktion f, d. h. die Menge aller Funktionen Φ, deren erste Ableitung gleich f ist, ist deshalb:

$$I_f = \{\Phi \mid y = \Phi(x) = F(x) + C;\ C \in R\}.$$

Dabei ist F eine beliebige Stammfunktion von f.

44.2. Geometrische Darstellung der Stammfunktionen einer Funktion f

Aus der Relation $\Phi' = f$, die man zur Definition von Φ benutzt, erkennt man, daß die Stammfunktionen $\Phi \in I_f$ in einem Intervall der Variablen x differenzierbar sein müssen. Da sich die Terme $\Phi_1(x) = F(x) + C_1$ und $\Phi_2(x) = F(x) + C_2$ der Gleichungen zweier beliebiger Stammfunktionen Φ_1; $\Phi_2 \in I_f$ nur durch einen konstanten Summanden $(C_2 - C_1) \in R$ voneinander unterscheiden, haben die Funktionskurven $C(\Phi)$ aller Stammfunktionen $\Phi \in I_f$ die gleiche Form. Das bedeutet, daß in den Punkten aller dieser Kurven mit der gleichen Abszisse x_0 die Kurventangenten den gleichen Anstieg haben. Die Kurven liegen zueinander in Richtung der Ordinatenachse parallelverschoben.

► **Def.:** Die Menge $\{C(\Phi)\}$, die aus den Funktionskurven aller Stammfunktionen $\Phi \in I_f$ besteht, heißt die Kurvenschar mit der Gleichung $y = \Phi(x) = F(x) + C$.

Beispiel:

Wenn f die Gleichung $y = f(x) = x^2$ hat, so sind Φ_1 mit $y = \Phi_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ und Φ_2 mit $y = \Phi_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}$ zwei Stammfunktionen aus I_f. Ihre Funktionskurven sind: $C(\Phi_1)$ und $C(\Phi_2)$, zwei Kurven der Kurvenschar mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

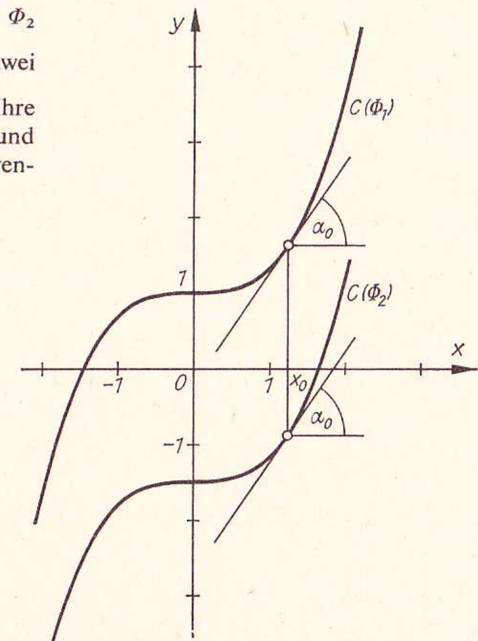


Abb. 44.1. Funktionskurven zweier Stammfunktionen

44.3. Grundregeln für die Bestimmung von Stammfunktionen

Der Term $F(x)$ für die explizite Funktionsgleichung der Stammfunktion F kann für einige analytisch darstellbare Funktionen f durch „Umkehrung" der Differentiationsregeln sofort bestimmt werden, und man erhält dadurch Grundregeln für die Bestimmung von Stammfunktionen. Als Operationssymbol für die Bestimmung der Terme $\Phi(x)$ in den expliziten Funktionsgleichungen der Stammfunktionen Φ einer Funktion f benutzt man das Zeichen „∫" und schreibt:

■ $I_f = \{\Phi \mid y = \Phi(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C;\ C \in R\}$.

Die Bestimmung der Menge I_f, d. h. der Funktionsgleichungen für alle Stammfunktionen Φ von f, nennt man „unbestimmte Integration der Funktion f". Die Symbolik „$\int f(x)\,dx$" liest man: „Integral f von x dx", f nennt man den Integranden und C die Integrationskonstante. Beispielsweise gilt: $y = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C;\ C \in R$.
Durch „Umkehrung" der speziellen Differentiationsregeln für die elementaren analytisch darstellbaren Funktionen ergeben sich die folgenden Regeln für die unbestimmte Integration.

■ Regeln für die unbestimmte Integration

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C;\ p \in R \setminus \{-1\} \qquad \text{denn} \quad \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} + C\right]' = x^p;\ p \in R \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad [\ln x + C]' = \frac{1}{x}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \left[\frac{a^x}{\ln a} + C\right]' = a^x$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad [e^x + C]' = e^x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad [\sin x + C]' = \cos x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad [-\cos x + C]' = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad [\tan x + C]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \qquad [-\cot x + C]' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc\,sin} x + C \qquad [\operatorname{Arc\,sin} x + C]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tan} x + C \qquad [\operatorname{Arc\,tan} x + C]' = \frac{1}{1+x^2}$$

Anmerkung: Weil die Logarithmusfunktion nur für positive reelle Zahlen definiert ist, muß $\ln|x|$ geschrieben werden.

Man kann aber nicht für alle analytisch darstellbaren Funktionen f die Stammfunktionen nur mit Hilfe von Differentiationsregeln bilden. Beispiele dafür sind die Funktionen mit den Gleichungen $y = f(x) = \tan x$ und $y = f(x) = x \cdot \ln x$. Es gibt sogar analytisch darstellbare Funktionen, deren Stammfunktionen man mit den Mitteln der Differentialrechnung nicht bestimmen kann. Ein Beispiel dafür ist die Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = \frac{1}{\ln x}$. Daraus erkennt man, daß die Bestimmung der Stammfunktionen einer gegebenen analytisch darstellbaren Funktion f oft viel schwieriger ist als die Differentiation von f.

44.4. Allgemeingültige Regeln für die unbestimmte Integration

Häufig braucht man zur Bestimmung der Stammfunktionen einer Funktion f zwei allgemeingültige Regeln, die man durch „Umkehrung" der entsprechenden allgemeingültigen Differentiationsregeln erhält.

Aus $[F_1(x) \pm F_2(x)]' = F_1'(x) \pm F_2'(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ folgt

■ $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

Wenn der Term $f(x)$ eine Summe oder Differenz aus zwei Termen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist, so darf man die unbestimmte Integration von f gliedweise durchführen.

Aus $[c \cdot F(x)]' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$ erhält man

■ $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$.

Einen konstanten Faktor c darf man bei der unbestimmten Integration vor das Operationssymbol schreiben.

Anmerkung: Wie schon aus der Definition des Begriffes der Stammfunktion Φ folgt, kann man durch Differentiation von Φ prüfen, ob die unbestimmte Integration von f richtig durchgeführt wurde.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Unter welcher Bedingung ist eine Funktion Φ eine Stammfunktion einer analytisch darstellbaren Funktion f?
2. Wieviel Stammfunktionen gibt es zu einer gegebenen Funktion f?
3. Wodurch unterscheiden sich zwei beliebige Stammfunktionen einer Funktion f voneinander?
4. Wie erhält man die Funktionsgleichungen aller Stammfunktionen einer gegebenen Funktion f?
5. Welche Eigenschaft haben alle Stammfunktionen der Menge I_f?
6. Welche geometrische Bedeutung hat die Aussage, daß die Funktionskurven $C(\Phi)$ aller Stammfunktionen Φ einer Funktion f die gleiche Form haben?
7. Welche Lage haben die Funktionskurven $C(\Phi)$ aller Stammfunktionen Φ einer Funktion f im Koordinatensystem?

8. Wie nennt man die Menge $\{C(\Phi)\}$ aus den Funktionskurven aller Stammfunktionen Φ einer Funktion f?
9. Was versteht man unter der unbestimmten Integration einer analytisch darstellbaren Funktion f?
10. Wodurch erhält man die Grundregeln für die unbestimmte Integration?
11. Wie lauten die beiden einfachsten allgemeingültigen Regeln für die unbestimmte Integration in Worten?
12. Wie prüft man, ob man die unbestimmte Integration einer Funktion f richtig durchgeführt hat?

Aufgaben

1. Untersuchen Sie, für welche der folgenden Funktionen f die unbestimmte Integration mit Hilfe der Grundregeln und der beiden einfachsten allgemeingültigen Regeln (Abschnitt 44.4.) durchgeführt werden kann!

1. für alle ganzrationalen Funktionen f
2. für alle Wurzelfunktionen mit $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$; $n \in N \setminus \{0; 1\}$
3. für die Funktion f mit $y = f(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$
4. für die Exponentialfunktionen mit $y = f(x) = a^x$; $a \in R^+ \setminus \{1\}$
5. für die Exponentialfunktion mit $y = f(x) = e^{x^2+1}$
6. für die Logarithmusfunktion mit $y = f(x) = \log_5 x$
7. für die Logarithmusfunktion mit $y = f(x) = \ln(3x - 1)$
8. für die Sinusfunktion und für die Kosinusfunktion
9. für die Funktion f mit $y = f(x) = 2 \cdot \sin(3x + 1)$
10. für die Tangensfunktion und für die Kotangensfunktion
11. für die Arcussinusfunktion
12. für die zyklometrische Funktion f mit $y = f(x) = 2 \cdot \operatorname{Arc} \tan x$

2. Für welche gebrochenrationalen Funktionen f kann die unbestimmte Integration mit Hilfe der Grundregeln und der beiden einfachsten allgemeingültigen Regeln (Abschnitt 44.4.) durchgeführt werden? Geben Sie die Gleichungen dieser Funktionen an!

3. Bilden Sie zu den folgenden Termen $f(x)$ die Terme $\Phi(x)$ von je drei verschiedenen Stammfunktionen Φ der Funktion f!

1. $f(x) = 0$
2. $f(x) = 5x^4$
3. $f(x) = 3$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 2$
5. $f(x) = 4x + 2$
6. $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x + \dfrac{2}{3}$
7. $f(x) = \dfrac{3}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} - \dfrac{1}{x} + 1$

4. Eine Funktion f hat die Gleichung $y = f(x) = \dfrac{x}{2}$.

1. Bestimmen Sie die Menge I_f aller Stammfunktionen Φ von f!
2. Stellen Sie drei Stammfunktionen aus der Menge I_f in demselben Koordinatensystem graphisch dar!

3. Bestimmen Sie die Gleichungen der Stammfunktionen $\Phi \in I_f$, deren Graph $C(\Phi)$
a) die Ordinatenachse im Punkt $P_y(0; 4)$ schneidet,
b) durch den Punkt $P_1(1; 1)$ geht!

5. Geben Sie für jede der folgenden Funktionen f die Gleichung derjenigen Stammfunktion Φ_0 an, die an der Stelle x_0 den Funktionswert $\Phi_0(x_0)$ besitzt!

1. $f\colon y = f(x) = 2;\quad x_0 = 3;\quad \Phi_0(x_0) = 8$
2. $f\colon y = f(x) = -x;\quad x_0 = -2;\quad \Phi_0(x_0) = 1$
3. $f\colon y = f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + 1;\quad x_0 = 2;\quad \Phi_0(x_0) = -1$
4. $f\colon y = f(x) = \dfrac{3}{x^2};\quad x_0 = 3;\quad \Phi_0(x_0) = 2$

6. Führen Sie die folgenden unbestimmten Integrationen durch!

1. $\int 2\,dx;\ \int x^5\,dx;\ \int 3x^2\,dx;\ \int -6x^2\,dx$
2. $\int (x + 3)\,dx;\ \int (1 + 3x)\,dx;\ \int (4 - 2x)\,dx;\ \int -(4x - 1)\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{3}{2}x^2\,dx;\ \int \frac{x}{5}\,dx;\ \int \frac{ax^2}{b}\,dx;\ \int (ax^7)\,dx$
4. $\displaystyle\int (2x^3 - 2)\,dx;\ \int (x - 1)(x + 1)\,dx;\ \int \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 10x - \frac{1}{3}\right)dx$
5. $\displaystyle\int (-7)\,dz;\ \int (5w^9)\,dw;\ \int gt\,dt;\ \int \frac{dr}{2\pi^2}$
6. $\int (a_0 + a_1x + a_2x^2)\,dx;\ \int (v^2 + 3c + v^5c^2)\,dc;\ \int (\sqrt{a} - z + \sqrt{b})\,dz$

45. Integrationsmethoden

Integrationsmethoden sind besondere Methoden zur Bestimmung von Stammfunktionen. Zwei wichtige Integrationsmethoden, die häufig angewendet werden, sind die Methode der partiellen Integration und die Integration durch Substitution.

45.1. Die Methode der partiellen Integration

Wenn der Term $f(x)$ des Integranden f ein Produkt $u'(x) \cdot v(x)$ aus zwei Termen in x ist, so kann man für die unbestimmte Integration $\Phi(x) = \int f(x)\,dx = \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$ der Funktion f in vielen Fällen die Relation

■ $\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$

benutzen.

Dabei muß man voraussetzen, daß eine Stammfunktion u der Funktion u' existiert und daß die Funktionen u und v in einem gemeinsamen Intervall differenzierbar sind.
Um alle Stammfunktionen Φ der Funktion f zu bestimmen, sucht man zunächst eine Stammfunktion u von u'. Danach muß man noch eine unbestimmte Integration einer Funktion f_1 mit der Gleichung $y = f_1(x) = u(x) \cdot v'(x)$ durchführen. Die Stammfunktionen von f_1 kann man aber oft mit Hilfe einer Grundregel finden.
Weil bei dieser Methode zunächst nur ein „Teil" u' der Funktion f unbestimmt integriert wird, nennt man sie die Methode der partiellen Integration.
Zur Begründung dieser Relation geht man davon aus, daß die Funktionen u und v in einem gemeinsamen Intervall differenzierbar sind. Nach der Produktregel der Differentialrechnung gilt:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Daraus ergibt sich durch äquivalente Umformung:

$$u'(x) \cdot v(x) = [u(x) \cdot v(x)]' - u(x) \cdot v'(x).$$

Wenn man noch für beide Seiten dieser Gleichung eine unbestimmte Integration durchführt und dabei die Aussage

$$\int [u(x) \cdot v(x)]' \, dx = u(x) \cdot v(x)$$

anwendet, so erhält man:

$$\int u'(x) \cdot v(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, dx.$$

Beispiel 1

Wenn $\int x \cdot \ln x \, dx$ bestimmt werden soll, so wählt man $u'(x) = x$ und $v(x) = \ln x$. Für die Stammfunktion u von u' erhält man dann den Term $u(x) = \frac{1}{2}x^2$, und für die erste Ableitung v' von v gilt $v'(x) = \frac{1}{x}$.
Damit ergibt sich:

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx.$$

Die unbestimmte Integration $\int x \, dx$ kann aber mit Hilfe einer Grundregel durchgeführt werden, und man bekommt:

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Wählt man in diesem Beispiel nicht $u'(x) = x$, sondern setzt $u'(x) = \ln x$ und $v(x) = x$, so muß man zunächst die unbestimmte Integration $\int \ln x \, dx$ durchführen. Das ist aber mit Hilfe einer Grundregel nicht möglich.

An diesem Beispiel erkennt man, daß es bei der Anwendung der Methode der partiellen Integration nicht gleichgültig ist, welchen Faktor des Terms $f(x)$ man als $u'(x)$ bzw. $v(x)$ schreibt. Man muß die Faktoren so wählen, daß man für die unbestimmte Integration $\int u(x) \cdot v'(x) \, dx$ einen möglichst einfachen Term $f_1(x) = u(x) \cdot v'(x)$ erhält. Das erreicht man im allgemeinen dadurch, daß man

zunächst als $v(x)$ denjenigen Faktor nimmt, der sich beim Differenzieren vereinfacht. Dabei muß man beachten, daß für den anderen Faktor $u'(x)$ sofort der Term $u(x)$ einer Stammfunktion angegeben werden kann.
Oft ist der Term $f_1(x)$ noch nicht so einfach, daß die unbestimmte Integration $\int u(x) \cdot v'(x) \, dx$ mit Hilfe einer Grundregel durchführbar ist. In solchen Fällen versucht man, durch mehrmalige Anwendung der Methode der partiellen Integration die Funktion f unbestimmt zu integrieren.

Beispiel 2

$\int x^2 \cdot e^x \, dx$
$u'(x) = e^x \quad v(x) = x^2$
$u(x) = e^x \quad v'(x) = 2x$
$\int x^2 \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x \, dx$

$\int x \cdot e^x \, dx$
$u'(x) = e^x \quad v(x) = x$
$u(x) = e^x \quad v'(x) = 1$
$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + \overline{C}$

$\int x^2 \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2(x \cdot e^x - e^x + \overline{C}) = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

In einigen Fällen ergibt sich durch die Anwendung der Methode der partiellen Integration eine Relation, die auf beiden Seiten den gesuchten Term $\int f(x) \, dx = \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$ enthält und die nach diesem Term aufgelöst werden kann.

Beispiel 3

$\int \cos^2 x \, dx$
$u'(x) = \cos x \quad v(x) = \cos x$
$u(x) = \sin x \quad v'(x) = -\sin x$
$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx$
$\qquad = \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$
$\qquad = \sin x \cdot \cos x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx$
$2 \cdot \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x + \overline{C}$
$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\sin x \cdot \cos x + x) + C$

Für einige besondere Funktionen f kann man die unbestimmte Integration dadurch erreichen, daß man $u'(x) = 1$ wählt.

Beispiel 4

$\int \ln x \, dx$
$u'(x) = 1 \quad v(x) = \ln x$
$u(x) = x \quad v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$$

Man kann die Methode der partiellen Integration natürlich nicht auf alle Integranden f anwenden, für die $f(x)$ ein Produkt aus zwei Termen in x ist.

45.2. Die Integration durch Substitution

Die Differentiation verketteter Funktionen mit Gleichungen der Form $y = F(g(x))$ ist mit Hilfe der Kettenregel immer möglich, und es gilt:

$$y' = [F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Eine allgemeingültige Regel für die unbestimmte Integration verketteter Funktionen gibt es dagegen nicht.
Wenn jedoch die Funktionsgleichung des Integranden f_1 die Form $y = f_1(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ hat, so kann man die Stammfunktionen von f_1 mit Hilfe der Methode der Integration durch Substitution bestimmen.
Um die unbestimmte Integration $\int f_1(x)\,dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$ durchzuführen, substituiert man durch die Gleichung $z = g(x)$ für den Term $g(x)$ eine neue Variable z. Da $dz = g'(x)\,dx$ und damit $dx = \frac{dz}{g'(x)}$ gilt, erhält man $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(z) \cdot g'(x) \cdot \frac{dz}{g'(x)} = \int f(z)\,dz$, und die Funktion f mit der unabhängigen Variablen z kann man in vielen Fällen mit Hilfe einer Grundregel unbestimmt integrieren. Danach wird in den Term $F(z)$ der Stammfunktion F von f für die Variable z wieder der Term $g(x)$ mit der ursprünglichen Variablen x eingesetzt.
Faßt man die einzelnen Schritte zusammen, nach denen man die unbestimmte Integration einer Funktion f_1 mit Hilfe der Methode der Integration durch Substitution durchführt, so ergibt sich die Relation:

■ $$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(z) \cdot g'(x) \cdot \frac{dz}{g'(x)} = \int f(z)\,dz = F(z) + C = F(g(x)) + C.$$

Die Integration durch Substitution darf aber nur unter der Voraussetzung angewendet werden, daß die Funktion g in einem Intervall der Variablen x streng monoton und differenzierbar ist.

Beispiele:

(1) $$\int (x^2 + 2x)^3 (2x + 2)\,dx = \int z^3(2x + 2)\frac{dz}{2x + 2} = \int z^3\,dz = \frac{z^4}{4} + C = \frac{(x^2 + 2x)^4}{4} + C$$

Substitution: $z = x^2 + 2x$; $dz = (2x + 2)\,dx$; $dx = \frac{dz}{2x + 2}$

(2) $$\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \int z^2 \cdot \cos x \cdot \frac{dz}{\cos x} = \int z^2\,dz = \frac{1}{3}z^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Substitution: $z = \sin x$; $dz = \cos x\,dx$; $dx = \frac{dz}{\cos x}$

Besondere Formen des Terms $f_1(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ für den Integranden f_1 sind u. a. $f_1(x) = g(x) \cdot g'(x)$, $f_1(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ und $f_1(x) = a \cdot f(g(x)) \cdot g'(x)$ mit $a \in R \setminus \{0\}$.

Beispiele:

(3) $$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

Substitution: $z = \sin x$

(4) $$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

Substitution: $z = \cos x$

(5) $$\int 5x \cdot \sqrt{2x^2 - 3}\,dx = \frac{5}{6}\sqrt{(2x^2 - 3)^3} + C$$

Substitution: $z = 2x^2 - 3$

Durch die Substitution einer neuen Variablen z kann man auch viele Funktionen f_1 unbestimmt integrieren, deren Gleichungen nicht die Form $y = f_1(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ haben.
Bei der unbestimmten Integration mancher Funktionen muß sowohl die Methode der partiellen Integration, als auch die Integration durch Substitution angewendet werden. Ein Beispiel dafür ist die Funktion f mit der Gleichung

$$y = f(x) = \operatorname{Arc\,tan} x.$$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Was versteht man unter einer Integrationsmethode?
2. Welche Form muß der Term $f(x)$ des Integranden f haben, wenn man die Methode der partiellen Integration anwenden will?
3. Welche Relation benutzt man, wenn man eine Funktion f mit Hilfe der Methode der partiellen Integration unbestimmt integriert?
4. Welche Regel der Differentialrechnung braucht man zur Begründung der Methode der partiellen Integration?
5. Unter welchen Voraussetzungen kann die Methode der partiellen Integration angewendet werden?
6. Wie muß man bei der Anwendung der Methode der partiellen Integration die Faktoren $u'(x)$ und $v(x)$ des Terms $f(x)$ wählen?
7. Welchen Term des Produkts $u'(x) \cdot v(x)$ wählt man bei der Anwendung der Methode der partiellen Integration im allgemeinen als $v(x)$?
8. In welchen Fällen kann man versuchen, eine Funktion f durch mehrmalige Anwendung der Methode der partiellen Integration unbestimmt zu integrieren?
9. Was für eine Relation ergibt sich, wenn man die Methode der partiellen Integration auf $\int \cos^2 x\,dx$ anwendet?

10. Wie führt man die unbestimmte Integration der natürlichen Logarithmusfunktion mit Hilfe der Methode der partiellen Integration durch?
11. Welche Form hat die Funktionsgleichung eines Integranden f_1, dessen Stammfunktionen man in vielen Fällen mit Hilfe der Methode der Integration durch Substitution finden kann?
12. In welchen Schritten führt man die unbestimmte Integration einer Funktion f_1 mit Hilfe der Methode der Integration durch Substitution durch?
13. Nach welcher Relation wird eine Funktion f_1 mit Hilfe der Methode der Integration durch Substitution unbestimmt integriert?
14. Welche besonderen Formen kann der Term $f_1(x)$ eines Integranden f_1 beispielsweise haben, wenn f_1 nach der Methode der Integration durch Substitution unbestimmt integriert werden soll?
15. Welche Integrationsmethode muß man anwenden, um eine Funktion mit der Gleichung $y = f(ax + b)$; a; $b \in R \setminus \{0\}$ unbestimmt zu integrieren?

Aufgaben

1. Ersetzen Sie die Wortgruppe „durch + Substantiv" durch einen Nebensatz, der mit der Konjunktion „indem" eingeleitet wird!

Die Stammfunktionen einer Funktion f erhält man durch unbestimmte Integration dieser Funktion.

► Die Stammfunktionen einer Funktion f erhält man, indem man diese Funktion unbestimmt integriert.

1. Nicht alle Funktionen kann man durch Anwendung der Grundregeln unbestimmt integrieren.
2. Ob eine unbestimmte Integration richtig durchgeführt wurde, kann man durch Differentiation der Stammfunktionen des Integranden prüfen.
3. Die Methode der partiellen Integration begründet man durch „Umkehrung" der Produktregel der Differentialrechnung.
4. Durch geeignete Wahl der Faktoren $u'(x)$ und $v(x)$ ergibt sich für das Produkt in vielen Fällen eine einfache Form.
5. Die unbestimmte Integration vieler Funktionen wird durch die Substitution einer neuen Variablen z möglich.
6. Durch Zusammenfassung der einzelnen Schritte dieser Integrationsmethode ergibt sich eine Relation, nach der man die Integration durch Substitution durchführt.

2. Schreiben Sie in den Satzgefügen für den Nebensatz die Wortgruppe „durch + Substantiv"!

Indem man eine Funktion f mit einer Funktion g verkettet, entsteht eine Funktion mit der Gleichung $y = f(g(x))$.

► Durch Verkettung einer Funktion f mit einer Funktion g entsteht eine Funktion mit der Gleichung $y = f(g(x))$.

1. Indem man den Term $F(x)$ für eine beliebige Stammfunktion F einer Funktion f angibt, ist die Menge I_f aller Stammfunktionen von f eindeutig und vollständig bestimmt.

2. Viele Funktionen können unbestimmt integriert werden, indem man Integrationsmethoden anwendet.
3. Einige Funktionen kann man unbestimmt integrieren, indem man die Methode der partiellen Integration mehrmals anwendet.
4. Den Term $F(x)$ für die Funktionsgleichung einer Stammfunktion F von f erhält man oft, indem man die Relation nach $\int f(x)\,dx$ auflöst.
5. Die Gültigkeit der Relation für die Methode der partiellen Integration kann man nachweisen, indem man sie mit Hilfe der Produktregel der Differentialrechnung begründet.
6. Indem man den Term $g(x)$ für die Variable z einsetzt, ergibt sich für die Stammfunktion F wieder ein Term in x.

3. Entscheiden Sie, welche Integrationsmethode man benutzen muß, und bilden Sie dann Sätze mit der Wortgruppe „die Methode der partiellen Integration anwenden" bzw. „die Methode der Integration durch Substitution benutzen"!

$y = f(x) = x \cdot \ln x$

► Bei der unbestimmten Integration der Funktion f mit $y = f(x) = x \cdot \ln x$ wird die Methode der partiellen Integration angewendet.

1. $y = f(x) = x \cdot \sin x$
2. $y = f(x) = x^2 \cdot \cos x$
3. $y = f(x) = \cot x$
4. $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$
5. $y = f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$
6. $y = f(x) = e^{2x-1}$
7. $y = f(x) = x \cdot e^{x^2+1}$
8. $y = f(x) = \ln x$
9. $y = f(x) = x \cdot e^x + 1$
10. $y = f(x) = \operatorname{Arc\,tan} x$

4. Bestimmen Sie die Gleichung $z = g(x)$ für die Substitution einer neuen Variablen z, und bilden Sie damit Sätze!

$y = f_1(x) = \sqrt{2x - 3}$

► Um die Funktion f_1 mit $y = f_1(x) = \sqrt{2x - 3}$ unbestimmt zu integrieren, muß man mit Hilfe der Gleichung $z = 2x - 3$ eine neue Variable z substituieren.

1. $y = f_1(x) = \sin x \cdot \cos x$
2. $y = f_1(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 5}$
3. $y = f_1(x) = x \cdot e^{\frac{x^2}{2} - 1}$
4. $y = f_1(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + 1\right)$
5. $y = f_1(x) = x \cdot \sin(x^2 + 1)$
6. $y = f_1(x) = x \cdot \cos\left(x^2 - \frac{\pi}{2}\right)$

5. Führen Sie die folgenden unbestimmten Integrationen mit Hilfe der Methode der partiellen Integration durch!

1. $\int x \cdot \sin x\, dx$
2. $\int x^2 \cdot \sin x\, dx$
3. $\int x^2 \cdot \ln x\, dx$
4. $\int \sin^2 x\, dx$
5. $\int x \cdot \cos x\, dx$
6. $\int x^2 \cdot \cos x\, dx$
7. $\int \sin x \cdot \cos x\, dx$
8. $\int (\ln x)^2\, dx$

6. Führen Sie die folgenden unbestimmten Integrationen durch, indem Sie eine neue Variable z substituieren!

1. $\int (2x + 1)^5 \, dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - 2x}}$
3. $\int e^{3x-1} \, dx$
4. $\int \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) dx$
5. $\int \frac{dx}{1 + 3x^2}$
6. $\int x(x^2 + 1)^3 \, dx$
7. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt[3]{2 - x^2}}$
8. $\int 2^{3x} \, dx$
9. $\int x^3(x^4 + 1)^3 \, dx$
10. $\int \frac{e^x + 1}{e^x + x} \, dx$
11. $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$
12. $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$
13. $\int \cot x \, dx$
14. $\int \frac{\sin x \, dx}{1 + 2 \cdot \cos x}$
15. $\int \sqrt{2x + 3} \, dx$
16. $\int \frac{dx}{2x - 1}$
17. $\int e^{-\frac{x}{2}} \, dx$
18. $\int \frac{dx}{\cos^2 (2x + 1)}$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}$
20. $\int 5x \cdot \sqrt{2x^2 - 3} \, dx$
21. $\int \frac{2x \, dx}{\sqrt{1 + 3x^2}}$
22. $\int 2x \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) dx$
23. $\int \frac{x \cdot \sqrt{\pi}}{x^2 + \pi} \, dx$
24. $\int \frac{x \, dx}{\sin^2\left(3x^2 + \frac{\pi}{2}\right)}$
25. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$
26. $\int \tan x \, dx$
27. $\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin x}$
28. $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \, dx$

7. Führen Sie die unbestimmten Integrationen durch, und benutzen Sie dabei die angegebenen Substitutionen! Substituieren Sie auch für x und dx den entsprechenden Term!

1. $\int x \cdot \sqrt{x - 1} \, dx$ Substitution: $t = \sqrt{x - 1}$
2. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x + 1}}$ Substitution: $t = \sqrt{x + 1}$

8. Das „Kreisintegral" ist $\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$. Führen Sie die unbestimmte Integration mit Hilfe der Substitution $x = r \cdot \sin t$ durch!

9. Führen Sie die folgenden unbestimmten Integrationen durch, und benutzen Sie dabei sowohl die Methode der partiellen Integration, als auch die Integration durch Substitution!

1. $\int x \cdot \operatorname{Arc} \sin x \, dx$
2. $\int \operatorname{Arc} \sin x \, dx$
3. $\int \operatorname{Arc} \tan x \, dx$
4. $\int e^{-\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{\pi}{3} x \, dx$

46. Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion

Bei der Lösung naturwissenschaftlicher und technischer Probleme muß man sehr oft bestimmte Integrale stetiger Funktionen berechnen. Vor allem in der Physik spielt der Begriff des bestimmten Integrals eine fundamentale Rolle, weil man ihn u. a. zur Definition vieler physikalischer Größen braucht.
So wird beispielsweise die mechanische Arbeit, die bei nicht konstanter Kraft auf einem Weg verrichtet werden muß, mit Hilfe des Integralbegriffes definiert und auch berechnet.
Zwei andere Grundprobleme, die man durch Berechnung bestimmter Integrale löst und deren Lösung man auch mit Hilfe des Integralbegriffes begründet, sind die Ermittlung des Flächeninhaltes eines krummlinig begrenzten, ebenen Flächenstückes und des Volumens eines Rotationskörpers.

46.1. Begriff des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion

Die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ soll in dem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetig sein. Das bedeutet, daß ihr Graph $C(f)$ für $a \leqq x \leqq b$ eine zusammenhängende Funktionskurve ist.
Um den Begriff des bestimmten Integrals der Funktion f zu definieren, muß man zuerst das Intervall $[a; b]$ in n abgeschlossene Teilintervalle zerlegen. Dazu wählt man $n - 1$ beliebige reelle Zahlen $x_1; x_2; \ldots; x_{n-1}$ aus dem Intervall $[a; b]$, die

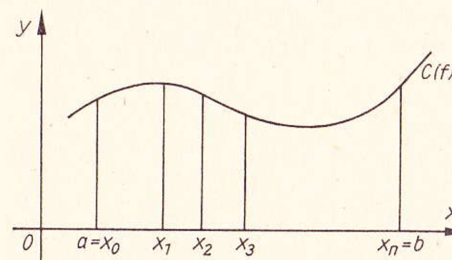


Abb. 46.1. Zerlegung eines Intervalls $[a; b]$ in Teilintervalle

die Eigenschaft $a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n-1} \leqq b$ haben. Wenn man noch $a = x_0$; $b = x_n$ schreibt, so erhält man die n abgeschlossenen Teilintervalle $[a; x_1] = [x_0; x_1]$; $[x_1; x_2]$; ...; $[x_{n-1}; x_n] = [x_{n-1}; b]$. Da die Funktion f in dem gesamten Intervall $[a; b] = [x_0; x_n]$ stetig ist, muß f auch in jedem dieser Teilintervalle $[x_{k-1}; x_k]$ mit $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$ stetig sein.
Wählt man aus jedem Teilintervall $[x_{k-1}; x_k]$ einen beliebigen Wert $\bar{x}_k$ der unabhängigen Variablen x mit $x_{k-1} \leqq \bar{x}_k \leqq x_k$, so hat f an jeder dieser Stellen $\bar{x}_k$ einen eindeutig bestimmten Funktionswert $\bar{y}_k = f(\bar{x}_k) \in W(f)$. Aus diesen n Funktionswerten $\bar{y}_k = f(\bar{x}_k)$ und den entsprechenden n Differenzen $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ werden jetzt die n Produkte

$$\bar{y}_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = f(\bar{x}_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k \quad \text{mit} \quad k \in \{1; 2; \ldots; n\}$$

gebildet. Wenn man diese n Produkte summiert, so erhält man:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k .$$

Diese Summe S_n nennt man eine n-te Näherungssumme der Funktion f im Intervall $[a; b] = [x_0; x_n]$.
Der Wert einer n-ten Näherungssumme S_n hängt davon ab, welche $n-1$ reellen Zahlen $x_1; x_2; \ldots; x_{n-1}$ aus dem Intervall $[a; b]$ und welche Stellen $\bar{x}_k$ aus den Teilintervallen $[x_{k-1}; x_k]$ gewählt werden. Da es aber für die Auswahl sowohl der $n-1$ reellen Zahlen $x_1; x_2; \ldots; x_{n-1}$ als auch der Stellen $\bar{x}_k$ unendlich viele Möglichkeiten gibt, ist der Wert einer n-ten Näherungssumme S_n nicht eindeutig bestimmt. Für jede feste Gliederzahl n gibt es deshalb unendlich viele n-te Näherungssummen S_n der Funktion f im Intervall $[a; b]$, d. h. unendlich viele Näherungssummen S_1 (Näherungssummen mit einem Summanden), unendlich viele Näherungssummen S_2 (Näherungssummen mit zwei Summanden), usw. Nimmt man eine beliebige der Näherungssummen S_1, eine beliebige der Näherungssummen S_2, usw., so entsteht eine unendliche Zahlenfolge $\{S_n\} = S_1; S_2; \ldots$
Auf diese Weise können unendlich viele Zahlenfolgen $\{S_n\}$ aus n-ten Näherungssummen gebildet werden.
Man kann jedoch beweisen, daß alle diese Zahlenfolgen konvergent sind und daß ihre Glieder S_n einem gemeinsamen, eindeutig bestimmten Grenzwert F_a^b zustreben, wenn die Anzahl n der Summanden von S_n über alle Grenzen wächst und dabei gleichzeitig **alle** Differenzen Δx_k gegen null streben.

► **Def.:** Der gemeinsame Grenzwert F_a^b aller Zahlenfolgen $\{S_n\} = S_1; S_2; S_3; \ldots$ aus n-ten Näherungssummen S_n einer stetigen Funktion f im Intervall $[a; b]$ heißt das bestimmte Integral von f zwischen den Grenzen a und b.

Für diesen Grenzwert F_a^b schreibt man das Symbol:

$$F_a^b = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} S_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Man liest: Integral von a bis b, f von x, dx.

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nennt man auch Riemannsches Integral, weil es von dem Mathematiker Bernhard Riemann (1826–1866) definiert wurde.
Das Symbol „$\int$" heißt Integralzeichen, a nennt man die untere, b die obere Integrationsgrenze. Die Funktion f wird als Integrand, x als Integrationsvariable bezeichnet. Die reelle Zahl F_a^b, die man als Grenzwert erhält, heißt auch Wert des Integrals.
Der Wert eines bestimmten Integrals hängt nur vom Bau des Integranden und von den Integrationsgrenzen ab, der Name der Integrationsvariablen spielt dabei keine Rolle. Deshalb gilt:

■ $$F_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots .$$

► **Def.:** Genau dann, wenn für eine Funktion f ein endlicher Grenzwert $F_a^b = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} S_n$ existiert und eindeutig bestimmt ist, so heißt diese Funktion f im Intervall $[a; b]$ integrierbar.

■ *Satz:* Jede Funktion f, die in einem abgeschlossenen Intervall stetig ist, ist in diesem Intervall auch integrierbar.

Wenn eine Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ nicht überall stetig ist, so ist sie im allgemeinen in diesem Intervall auch nicht integrierbar.

► **Def.:** Eine Funktion f zwischen den Grenzen a und b integrieren bedeutet, den Grenzwert $F_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$ zu berechnen.

Beispiel für die Berechnung eines bestimmten Integrals:

Die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = x^2$ ist in ihrem Definitionsbereich $D(f) = R$ überall stetig. Deshalb ist f in jedem abgeschlossenen Intervall $[a; b] \subset R$ integrierbar.
Wenn man die Funktion f beispielsweise zwischen den Grenzen 1 und 4 integrieren, d. h. das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_1^4 x^2\,dx$$

berechnen will, so muß man das abgeschlossene Intervall $[a; b] = [1; 4]$ mit Hilfe von $n-1$ reellen Zahlen $x_k \in [1; 4]$; $k \in \{1; 2; \ldots; n-1\}$ in n abgeschlossene Teilintervalle $[x_{k-1}; x_k]$; $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$ zerlegen. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Differenzen $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$ gleich groß oder verschieden groß sind. Außerdem kann man die Stellen $\bar{x}_k$ aus den Teilintervallen $[x_{k-1}; x_k]$ beliebig wählen.

Nimmt man n gleich große Differenzen Δx_k, so gilt:

$$\Delta x_k = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}; \quad k \in \{1; 2; \ldots; n\}.$$

Die Stellen $\bar{x}_k$ sollen die oberen Intervallgrenzen x_k der Teilintervalle $[x_{k-1}; x_k]$ sein.
Wie man aus der folgenden Abbildung erkennen kann, ergibt sich für die Funktionswerte $f(\bar{x}_k)$ an diesen Stellen $\bar{x}_k = x_k = 1 + k \cdot \frac{3}{n}$:

$$f(\bar{x}_1) = f(x_1) = x_1^2 = \left(1 + 1 \cdot \frac{3}{n}\right)^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{n} + 1^2 \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2;$$

$$f(\bar{x}_2) = f(x_2) = x_2^2 = \left(1 + 2 \cdot \frac{3}{n}\right)^2 = 1 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{n} + 2^2 \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2;$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f(\bar{x}_n) = f(x_n) = x_n^2 = \left(1 + n \cdot \frac{3}{n}\right)^2 = 1 + 2 \cdot n \cdot \frac{3}{n} + n^2 \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2.$$

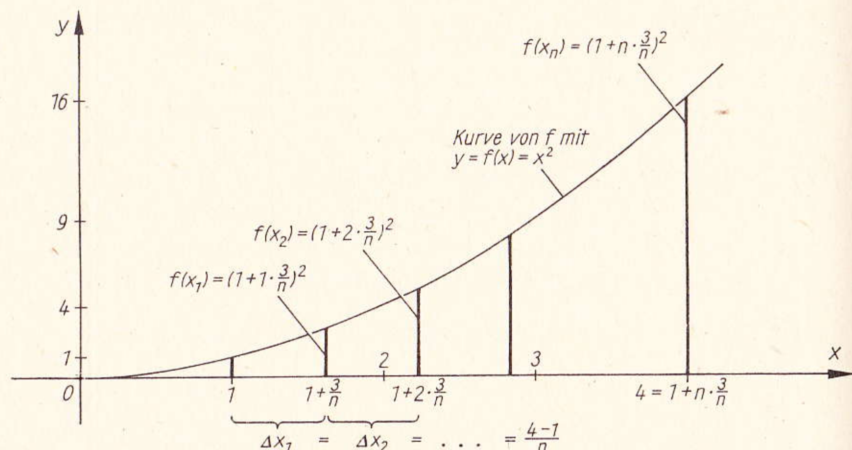


Abb. 46.2. Zur Bildung einer n-ten Näherungssumme S_n

Wenn man alle diese Funktionswerte noch mit $\Delta x_k = \frac{3}{n}$ multipliziert und dann die entstandenen Produkte addiert, so erhält man die n-te Näherungssumme:

$$S_n = \left[n + 2 \cdot \frac{3}{n} \cdot (1 + 2 + \ldots + n) + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right] \cdot \left(\frac{3}{n}\right).$$

Durch äquivalente Umformung mit Hilfe der Relationen

$$1 + 2 + \ldots + n \quad = \frac{n}{2} \cdot (n + 1);$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6} \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$$

folgt daraus:

$$S_n = 21 + \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2},$$

und das ist das allgemeine Glied der Zahlenfolge

$$\{S_n\} = \left\{21 + \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2}\right\}.$$

Um das bestimmte Integral $\int_1^4 x^2\,dx$ zu berechnen, muß man den Grenzwert dieser Zahlenfolge für $n \to \infty$ bestimmen, denn dabei streben gleichzeitig die Gliederzahl von S_n gegen unendlich und alle Differenzen $\Delta x_k = \frac{3}{n}$ gegen null:

$$F_a^b = F_1^4 = \int_1^4 x^2\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(21 + \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2}\right) = 21.$$

Den gleichen Grenzwert erhält man, wenn man eine beliebige andere Zerlegung des Intervalls $[1; 4]$ in n abgeschlossene Teilintervalle bzw. beliebige andere Stellen $\bar{x}_k$ aus den Teilintervallen wählt.
Dieses Beispiel zeigt, daß man bei der Berechnung bestimmter Integrale durch Grenzwertbildung meistens sehr schwierige Umformungen durchführen muß. Man berechnet deshalb bestimmte Integrale mit Hilfe von Funktionswerten einer Stammfunktion des Integranden f, denn das ist im allgemeinen viel leichter.

46.2. Geometrische Bedeutung des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f, die im Intervall $[a; b]$ nur positive Funktionswerte besitzt, hat eine wichtige geometrische Bedeutung. Wenn man die Funktion f graphisch darstellt, so erhält man eine Funktionskurve $C(f)$, die bezüglich des Intervalls $[a; b]$ oberhalb der Abszissenachse verläuft. Die Summanden $f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$ einer n-ten Näherungssumme S_n bedeuten dann die Maßzahlen für die Flächeninhalte von Rechteckflächen, deren Grundlinien Δx_k Längeneinheiten und deren Höhen $f(\bar{x}_k)$ Längeneinheiten betragen:

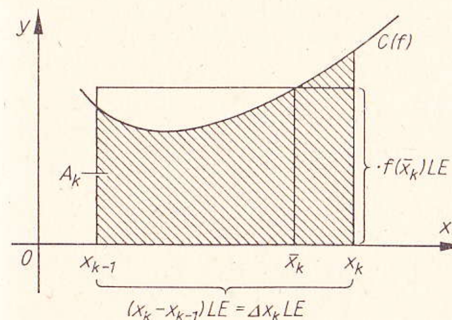


Abb. 46.3. Zur geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals

Jeder Summand $f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$ der Summe S_n ist deshalb ein Näherungswert für die Maßzahl des Flächeninhalts A_k des Flächenstückes, das von der Funktionskurve $C(f)$, der Abszissenachse und den beiden Parallelen zur Ordinatenachse mit den Gleichungen $x = x_{k-1}$ und $x = x_k$ begrenzt wird. Die n-te Näherungssumme S_n bedeutet dann einen Näherungswert für die Maßzahl des Flächeninhaltes A_a^b des Flächenstücks zwischen $C(f)$, der Abszissenachse und den beiden Parallelen zur Ordinatenachse mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$.
Je kleiner die Differenzen Δx_k sind, desto genauer wird die Maßzahl von A_a^b durch S_n angenähert.
Daran erkennt man, daß das bestimmte Integral $F_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$ geometrisch die Maßzahl des Flächeninhalts A_a^b für das ebene Flächenstück zwischen $C(f)$, der Abszissenachse und den beiden Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ bedeutet, wenn f in $[a; b]$ nur positive Werte hat.
Beispielsweise ergibt sich für das ebene Flächenstück zwischen der Parabel mit der Gleichung $y = f(x) = x^2$, der Abszissenachse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 4$ ein Flächeninhalt von $A_1^4 = 21$ Flächeneinheiten.

46.3. Eigenschaften des bestimmten Integrals

Für die folgenden Sätze wird vorausgesetzt, daß die Funktion f im Intervall $[a; b]$ stetig, d. h. integrierbar ist. Außerdem sollen nur die Grundgedanken der Beweise dieser Sätze angegeben werden.

■ *Satz:* Wenn die Funktion f im Intervall $[a; b]$ nur positive Funktionswerte besitzt, so ist auch ihr bestimmtes Integral zwischen den Grenzen a und b eine positive reelle Zahl:

$$\forall x \in [a; b]: f(x) > 0 \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F_a^b > 0.$$

Begründung:

Alle n-ten Näherungssummen S_n sind positiv, weil deren sämtliche Summanden $f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$ positiv sind. Der Grenzwert $F_a^b = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} S_n$ muß deshalb auch eine positive reelle Zahl sein.

■ *Satz:* Wenn die Funktion f im Intervall $[a; b]$ nur negative Funktionswerte hat, so ist das bestimmte Integral von f zwischen den Grenzen a und b eine negative reelle Zahl:

$$\forall x \in [a; b]: f(x) < 0 \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F_a^b < 0.$$

Begründung:

Da die Faktoren $f(\bar{x}_k)$ sämtlicher Summanden $f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$ für alle n-ten Näherungssummen S_n negativ sind, kann man aus ihnen den Faktor (-1) ausklammern, und man erhält:

$$S_n = (-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} |f(\bar{x}_k)| \cdot \Delta x_k.$$

Wenn man den Grenzwert $F_a^b = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} S_n$ bildet und dabei die Grenzwertsätze anwendet, so ergibt sich eine negative reelle Zahl.

■ *Satz:* Wenn x_z eine beliebige Stelle zwischen a und b ist, so kann man das bestimmte Integral von f zwischen den Grenzen a und b als Summe aus zwei bestimmten Integralen von f zwischen den Grenzen a und x_z und zwischen den Grenzen x_z und b berechnen:

$$x_z \in (a; b) \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_z} f(x)\,dx + \int_{x_z}^b f(x)\,dx.$$

Begründung:

Wenn man das Intervall $[a; b]$ zuerst mit Hilfe von x_z in zwei Intervalle $[a; x_z]$; $[x_z; b]$ und diese beiden Intervalle danach in n bzw. m Teilintervalle zerlegt, so kann man zwei Zahlenfolgen $\{S_n\}$ und $\{S_m\}$ bilden. S_n ist eine n-te Näherungssumme von f im Intervall $[a; x_z]$ und S_m eine m-te Näherungssumme von f im Intervall $[x_z; b]$. $(S_n + S_m)$ muß deshalb eine $(n + m)$-te Näherungssumme von f im Intervall $[a; b]$ sein, also gilt: $S_n + S_m = S_{n+m}$. Wenn man die entsprechenden Grenzwerte bildet und dabei die Grenzwertsätze anwendet, so ergibt sich die oben angegebene Relation.

Anmerkung: Diese drei Sätze über das bestimmte Integral sind wichtige Aussagen, die man bei der Berechnung des Flächeninhaltes eines ebenen Flächenstückes zwischen einer Funktionskurve $C(f)$, der Abszissenachse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ beachten muß, wenn die Funktion f im Integrationsintervall $[a; b]$ Nullstellen besitzt. In diesem Fall ergibt sich nämlich als Wert des bestimmten Integrals von f zwischen den Grenzen a und b nicht die Maßzahl des zu berechnenden Flächeninhalts.
So bedeutet beispielsweise das bestimmte Integral $\int_{-2}^{+2} \frac{1}{4} \cdot x^3\,dx$ nicht die Maßzahl für den Flächeninhalt A_{-2}^{+2} des endlichen ebenen Flächenstückes zwischen der Funktionskurve

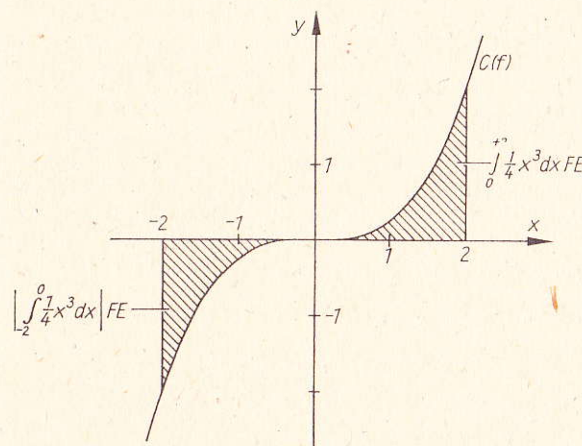


Abb. 46.4. Zum Charakter des bestimmten Integrals

von f mit $y = f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3$, der Abszissenachse und den beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = +2$, denn $\int\limits_{-2}^{+2} \frac{1}{4} \cdot x^3 \, dx = 0$. Die Funktion f hat nämlich im Integrationsintervall $[-2; +2]$ die Nullstelle $x_0 = 0$.

Das Flächenstück links vom Ursprung des Koordinatensystems liegt unterhalb der Abszissenachse, und das bestimmte Integral $\int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{4} \cdot x^3 \, dx$ ist deshalb negativ. Das Flächenstück rechts vom Ursprung des Koordinatensystems liegt oberhalb der Abszissenachse, und das bestimmte Integral $\int\limits_{0}^{+2} \frac{1}{4} \cdot x^3 \, dx$ ist positiv. Beide Integrale haben den gleichen Betrag, deshalb gilt:

$$\int\limits_{-2}^{+2} \frac{1}{4} \cdot x^3 \, dx = \int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{4} \cdot x^3 \, dx + \int\limits_{0}^{+2} \frac{1}{4} \cdot x^3 \, dx = 0.$$

An diesem Beispiel erkennt man deutlich, daß **das bestimmte Integral** einer stetigen Funktion f zwischen den Grenzen a und b **kein Flächeninhalt**, sondern eine reelle Zahl ist, obwohl man bestimmte Integrale zur Flächeninhaltsberechnung benutzt.

■ *Satz:* Wenn man die beiden Integrationsgrenzen a und b miteinander vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen des bestimmten Integrals:

$$\int\limits_{b}^{a} f(x) \, dx = -\int\limits_{a}^{b} f(x) \, dx.$$

Begründung:

Das Vertauschen der Integrationsgrenzen bedeutet, daß man die n-ten Näherungssummen S_n bilden muß, indem man das Integrationsintervall $[a; b]$ von b nach a in Teilintervalle zerlegt. Dadurch werden in allen Teilintervallen die Intervallgrenzen miteinander vertauscht, und als Summanden der Näherungssummen S_n ergeben sich die Produkte $f(\bar{x}_k) \cdot (x_{k-1} - x_k) = -f(\bar{x}_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = -f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$. Aus allen diesen Summanden kann man den Faktor (-1) ausklammern. Wenn man danach die entsprechenden Grenzwerte für $n \to \infty$ und $\Delta x_k \to 0$ bildet, so erhält man die oben angegebene Aussage.

Eine besonders wichtige Aussage, die bei der Lösung vieler Probleme angewendet wird, ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung. Er lautet:

■ *Satz:* Wenn eine Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetig ist, so gibt es mindestens eine Stelle $x_m \in [a; b]$, so daß das bestimmte Integral von f zwischen den Grenzen a und b gleich dem Produkt aus dem Funktionswert von f an der Stelle x_m und der Differenz aus den Intervallgrenzen ist:

$$f \text{ stetig in } [a; b] \to \exists x_m \in [a; b]: \int\limits_{a}^{b} f(x) \, dx = f(x_m) \cdot (b - a).$$

Dieser wichtige Satz soll ausführlich bewiesen werden.

Voraussetzung: f ist in $[a; b]$ stetig.

Behauptung: $\exists x_m \in [a; b]: \int\limits_{a}^{b} f(x) \, dx = f(x_m) \cdot (b - a)$

Beweis:

Da f nach Voraussetzung in $[a; b]$ stetig ist, gibt es mindestens eine Stelle $\bar{x} \in [a; b]$, an der f ein globales (absolutes) Minimum, d. h. einen kleinsten Funktionswert hat. Außerdem gibt es mindestens eine Stelle $\bar{\bar{x}} \in [a; b]$, an der f ein globales (absolutes) Maximum, d. h. einen größten Funktionswert hat. Für alle Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in [a; b]$ gilt deshalb:

(1) $f(\bar{x}) \leqq f(x) \leqq f(\bar{\bar{x}})$.

Diese Relation gilt selbstverständlich auch für alle Stellen $\bar{x}_k \in [a; b]$ der n-ten Näherungssummen S_n, also: $f(\bar{x}) \leqq f(\bar{x}_k) \leqq f(\bar{\bar{x}}) \; \forall k \in \{1; 2; \ldots; n\}$.
Durch Multiplikation mit den Differenzen Δx_k ergibt sich daraus:
$f(\bar{x}) \cdot \Delta x_k \leqq f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k \leqq f(\bar{\bar{x}}) \cdot \Delta x_k \; \forall k \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

Summiert man alle diese Produkte von $k = 1$ bis $k = n$, so erhält man:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}) \cdot \Delta x_k \leqq \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k \leqq \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\bar{x}}) \cdot \Delta x_k.$$

Da $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\bar{x}) \cdot \Delta x_k = f(\bar{x}) \cdot (b - a)$ und $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\bar{\bar{x}}) \cdot \Delta x_k = f(\bar{\bar{x}}) \cdot (b - a)$ gilt, muß $f(\bar{x}) \cdot (b - a) \leqq \sum\limits_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k \leqq f(\bar{\bar{x}}) \cdot (b - a)$ sein, und diese Relation bleibt auch dann bestehen, wenn man die entsprechenden Grenzwerte für $n \to \infty$ und $\Delta x_k \to 0$ bildet, also:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} f(\bar{x}) \cdot (b - a) \leqq \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k \leqq \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} f(\bar{\bar{x}}) \cdot (b - a).$$

Dafür kann man aber schreiben:

(2) $f(\bar{x}) \cdot (b - a) \leqq \int\limits_{a}^{b} f(x) \, dx \leqq f(\bar{\bar{x}}) \cdot (b - a)$.

Durch Multiplikation der Ungleichung (1) mit $(b - a)$ erhält man außerdem:

(3) $f(\bar{x}) \cdot (b - a) \leqq f(x) \cdot (b - a) \leqq f(\bar{\bar{x}}) \cdot (b - a) \; \forall x \in [a; b]$.

Da f nach Voraussetzung in $[a; b]$ stetig ist, nimmt f auf Grund der Relation (1) jeden Funktionswert zwischen $f(\bar{x})$ und $f(\bar{\bar{x}})$ einschließlich dieser beiden Funktionswerte im Intervall $[a; b]$ mindestens einmal an. Deshalb muß $f(x) \cdot (b - a)$ auf Grund der Relation (3) alle Werte zwischen $f(\bar{x}) \cdot (b - a)$ und $f(\bar{\bar{x}}) \cdot (b - a)$ einschließlich dieser beiden Werte für $x \in [a; b]$ mindestens einmal annehmen, d. h. auch für mindestens eine Stelle $x_m \in [a; b]$ auf Grund der Relation (2) den Wert $F_a^b = \int\limits_{a}^{b} f(x) \, dx$, also:

$\exists x_m \in [a; b]: \int\limits_{a}^{b} f(x) \, dx = f(x_m) \cdot (b - a)$, w. z. b. w.

Bei vielen Berechnungen braucht man den arithmetischen Mittelwert **aller** Funktionswerte einer stetigen Funktion f für ein abgeschlossenes Intervall $[a; b]$. Diesen Mittelwert nennt man den Integralmittelwert von f über das Intervall $[a; b]$.

▶ **Def.:** Unter dem Integralmittelwert einer stetigen Funktion f über ein abgeschlossenes Intervall $[a; b]$ versteht man den Quotienten aus dem bestimmten Integral von f zwischen den Grenzen a und b und der Differenz $(b - a)$ aus den Intervallgrenzen:

$$f(x_m) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Man erkennt daran, daß der Integralmittelwert von f über das Intervall $[a; b]$ der Funktionswert ist, den die Funktion f an der Stelle x_m annimmt.
Den Mittelwertsatz der Integralrechnung kann man geometrisch interpretieren. Wenn eine Funktion f im Intervall $[a; b]$ nur positive Funktionswerte hat, so bedeutet das bestimmte Integral von f zwischen den Grenzen a und b geometrisch die Maßzahl des Flächeninhalts A_a^b des ebenen Flächenstücks, das von $C(f)$, der Abszissenachse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Das Produkt $(b - a) \cdot f(x_m)$ bedeutet geometrisch die Maßzahl des Flächeninhalts $A(R)$ einer Rechteckfläche R, deren Grundlinie die Länge $(b - a)$ Längeneinheiten hat und deren Höhe $f(x_m)$ Längeneinheiten beträgt:

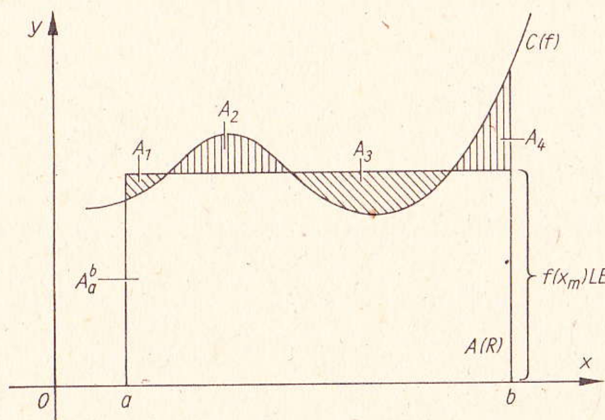


Abb. 46.5. Geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

Aus diesen beiden Aussagen ergibt sich die folgende geometrische Bedeutung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

■ Man kann stets eine Rechteckfläche R mit $A(R) = A_a^b$ bestimmen, deren Grundlinie die gleiche Länge wie die „Grundlinie" des endlichen Flächenstückes hat, das von $C(f)$, der Abszissenachse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Die Maßzahl der Höhe dieser Rechteckfläche R ist der Integralmittelwert von f über das Intervall $[a; b]$.

Für die obige Abbildung muß deshalb $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$ gelten.

Beispiel:

Der Integralmittelwert der Funktion f mit $y = f(x) = x^2$ über das Intervall $[1; 4]$ ist:

$$f(x_m) = \frac{1}{4-1} \cdot \int_1^4 x^2\,dx = \frac{21}{3} = 7.$$

Das endliche Flächenstück zwischen der Parabel $C(f)$, der Abszissenachse und den beiden Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 4$ hat den gleichen Flächeninhalt wie eine Rechteckfläche mit den Seitenlängen 3 LE und 7 LE.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Warum ist der Begriff des bestimmten Integrals ein fundamentaler Begriff?
2. Was erhält man, wenn man eine Funktion f, die in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetig ist, graphisch darstellt?
3. Welche Aussage kann man über die Stetigkeit einer Funktion f in einem beliebigen abgeschlossenen Teilintervall $[c; d]$ eines abgeschlossenen Intervalls $[a; b]$ machen, wenn f in $[a; b]$ stetig ist?
4. Was versteht man unter einer n-ten Näherungssumme S_n einer stetigen Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$?
5. Wovon hängt der Wert einer n-ten Näherungssumme S_n einer stetigen Funktion f in einem Intervall $[a; b]$ ab?
6. Wieviel n-te Näherungssummen S_n einer stetigen Funktion f in einem gegebenen Intervall $[a; b]$ gibt es für eine feste Gliederzahl n?
7. Wieviel unendliche Zahlenfolgen $\{S_n\}$ aus n-ten Näherungssummen S_n einer stetigen Funktion f in einem gegebenen Intervall $[a; b]$ kann man bilden?
8. Welche gemeinsame Eigenschaft haben alle Zahlenfolgen $\{S_n\}$ aus n-ten Näherungssummen S_n einer stetigen Funktion f in einem gegebenen Intervall $[a; b]$?
9. Was versteht man unter dem bestimmten Integral einer stetigen Funktion f zwischen den Grenzen a und b?
10. Wovon hängt der Wert eines bestimmten Integrals ab?
11. Unter welcher Bedingung heißt eine Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ integrierbar?
12. Welche hinreichende Bedingung muß eine Funktion f erfüllen, damit f im Intervall $[a; b]$ integrierbar ist?
13. Was bedeutet, eine Funktion f zwischen den Grenzen a und b zu integrieren?
14. Welche Gleichung hat die Parallele zur Ordinatenachse, die durch den Punkt $P(b; 0)$ geht?
15. Wofür ist das Produkt $f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$ ein Näherungswert?
16. Welche geometrische Bedeutung hat das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f, und was muß man bei der geometrischen Interpretation des bestimmten Integrals über die Funktion f voraussetzen?

17. Was ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f zwischen den Grenzen a und b positiv ist?
18. Unter welcher Bedingung ist das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f zwischen den Grenzen a und b negativ?
19. Wie kann man das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f zwischen den Grenzen a und b berechnen, wenn x_z eine Stelle zwischen a und b ist?
20. Warum bedeutet $\int_{-2}^{+2} \frac{1}{4} \cdot x^3 \, dx$ geometrisch nicht den Flächeninhalt des endlichen Flächenstückes, das vom Graph $C(f)$ des Integranden f, der Abszissenachse und den beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = +2$ begrenzt wird?
21. Für welche oberen Integrationsgrenzen b gilt: $\int_0^b \sin x \, dx = 0$?
22. Wie ändert sich das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f, wenn man die Integrationsgrenzen miteinander vertauscht?
23. Ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung eine Allaussage oder eine Existenzaussage?
24. Welche Bedingung muß eine Funktion f erfüllen, damit für sie der Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt?
25. Was versteht man unter dem Integralmittelwert $f(x_m)$ einer stetigen Funktion f über dem Intervall $[a; b]$?
26. Wie groß ist der Integralmittelwert $f(x_m)$, wenn $\int_1^6 f(x) \, dx = 20$ gilt?
27. Welche geometrische Bedeutung hat der Mittelwertsatz der Integralrechnung?

Aufgaben

1. Erläutern Sie, in welchen Schritten man den Begriff des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion f zwischen den Grenzen a und b erhält!

2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Terme äquivalent sind, indem Sie jeweils die ersten und letzten Summanden der Summen miteinander vergleichen! Antworten Sie!

$$\sum_{k=0}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n+1} f(\bar{x}_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

► Die beiden Terme sind äquivalent, denn ihre entsprechenden $n + 1$ Summanden sind einander gleich. Ihr erstes Glied ist $f(\bar{x}_0) \cdot (x_1 - x_0)$, und ihr letztes ist $f(\bar{x}_n) \cdot (x_{n+1} - x_n)$.

1. $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$ und $\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_{k+1}) \cdot (x_{k+1} - x_k)$
2. $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ und $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})$
3. $\sum_{s=1}^{n} f(\bar{x}_{s+1}) \cdot (x_{s+1} - x_s)$ und $\sum_{s=2}^{n+1} f(\bar{x}_s) \cdot (x_s - x_{s-1})$

3. Lesen Sie die folgenden Terme!

1. $\int_c^d x^3 \, dx$
2. $\int_{-}^{+3} \frac{t \, dt}{t^2 + 1}$
3. $\int_2^5 (x^2 + 2x) \, dx$
4. $\int_0 \sin u \, du$

4. Bestimmen Sie die Integrationsvariablen der bestimmten Integrale 3.1. bis 3.4.!

5. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen f in dem jeweils angegebenen Intervall integrierbar sind! Antworten Sie, und begründen Sie Ihre Antwort!

$y = f(x) = \frac{1}{x}$; $[-1; +2]$

► Die Funktion f mit $y = f(x) = \frac{1}{x}$ ist in dem abgeschlossenen Intervall $[-1; +2]$ nicht integrierbar, weil f in diesem Intervall die Polstelle $x_p = 0$ hat.

1. $y = f(x) = \frac{x}{x+1}$; $[0; 5]$
2. $y = f(x) = 2^x$; $[-2; +2]$
3. $y = f(x) = \ln x$; $[1; e]$
4. $y = f(x) = \cos \frac{1}{x}$; $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$
5. $y = f(x) = \tan x$; $[-\pi; 0]$
6. $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$; $[0; 5]$
7. $y = f(x) = 3 \cdot \sin x$; $[-\pi; +\pi]$
8. $y = f(x) = \lg \frac{x}{2}$; $[-2; +4]$

6. Berechnen Sie $\int_1^6 \frac{x}{2} \, dx$ durch Grenzwertbildung! Benutzen Sie dabei gleiche Differenzen Δx_k, und wählen Sie als Stellen $\bar{x}_k$ aus den Teilintervallen $[x_k - x_{k-1}]$ die unteren Intervallgrenzen x_{k-1}!

47. Das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion

47.1. Die Integralfunktionen einer stetigen Funktion

Den Begriff des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion f benutzt man zur Definition besonderer Funktionen F_p, der Integralfunktionen von f.
Der Wert des bestimmten Integrals eines stetigen Integranden f hängt nur vom

Bau des Terms $f(t)$ und von den Integrationsgrenzen ab. Wenn der Integrand f und die untere Integrationsgrenze $p \in [a; b]$ gegeben sind, so kann man mit Hilfe der Relation $y = \int_p^x f(t)\,dt$ für jede obere Integrationsgrenze x aus dem Integrationsintervall $[a; b]$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $y \in R$ berechnen. Dadurch entsteht eine unendliche Menge aus geordneten Paaren $(x; y)$ reeller Zahlen. Diese Menge ist deshalb eine eindeutige Abbildung des Intervalls $[a; b]$ in die Menge R der reellen Zahlen, d. h. eine reelle, analytisch darstellbare Funktion F_p:

$$F_p \left\{(x; y) \mid y = F_p(x) = \int_p^x f(t)\,dt;\, x \in [a; b]\right\}.$$

► **Def.:** Eine Funktion F_p heißt die Integralfunktion einer in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion f für die (feste) untere Grenze $p \in [a; b]$ genau dann, wenn für F_p die Gleichung

$$y = F_p(x) = \int_p^x f(t)\,dt \;\forall x \in [a; b]$$

gilt.

Da man mit jeder festen reellen Zahl $p \in [a; b]$ eine Integralfunktion F_p bilden kann, gibt es für jede in $[a; b]$ stetige Funktion f eine unendliche Menge M_F von Integralfunktionen F_p.
Alle Integralfunktionen einer solchen Menge M_F haben folgende wichtige gemeinsame Eigenschaft:

■ *Satz:* Wenn eine Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetig ist, so sind alle ihre Integralfunktionen F_p mit $p \in [a; b]$ differenzierbar, und die ersten Ableitungen F_p' von F sind alle gleich dem Integranden f.

Voraussetzung:

f ist in $[a; b]$ stetig.

F_p mit $p \in [a; b]$ ist Integralfunktion von f, d. h. $F_p(x) = \int_p^x f(t)\,dt$.

Behauptung:

$\forall F_p : F_p' = f$

Beweis:

Wenn x und $x + \Delta x$ zwei Werte der unabhängigen Variablen (obere Integrationsgrenzen) aus dem Intervall $[a; b]$ sind, so ist der Differenzenquotient von F_p für die Differenz Δx:

$$\frac{F_p(x + \Delta x) - F_p(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot [F_p(x + \Delta x) - F_p(x)].$$

Weil F_p eine Integralfunktion von f ist, kann man dafür nach Voraussetzung

$$\frac{F_p(x + \Delta x) - F_p(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[\int_p^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_p^x f(t)\,dt\right].$$

schreiben, und daraus folgt durch Umformung mit Hilfe der Eigenschaften des bestimmten Integrals:

$$\frac{F_p(x + \Delta x) - F_p(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Das ist aber der Integralmittelwert $f(x_m)$ der Funktion f über das Intervall $[x; x + \Delta x]$, denn für die Funktion f gilt der Mittelwertsatz der Integralrechnung, weil f nach Voraussetzung in $[a; b]$ und deshalb auch in dem abgeschlossenen Teilintervall $[x; x + \Delta x]$ von $[a; b]$ stetig ist.
Für $\Delta x \to 0$ strebt aber der Integralmittelwert $f(x_m)$ gegen den Funktionswert von f an der Stelle x, d. h. es gilt:

$$F_p'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_p(x + \Delta x) - F_p(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_m) = f(x),$$

w. z. b. w.

47.2. Begriff des unbestimmten Integrals einer stetigen Funktion

Die Relation $F_p' = f$ sagt aus, daß alle Integralfunktionen F_p einer Funktion f Stammfunktionen von f sind. Die Menge M_F aller Integralfunktionen F_p einer in $[a; b]$ stetigen Funktion f ist deshalb eine Teilmenge der Menge I_f aller Stammfunktionen von f:

$$M_F \subseteq I_f.$$

Das bedeutet aber, daß die Funktionsgleichungen der Integralfunktionen F_p von f die Form

$$y = F_p(x) = \int_p^x f(t)\,dt = F(x) + C \quad \text{mit } C \in R$$

haben müssen, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist. Daraus folgt, daß man die Terme $F_p(x)$ der expliziten Funktionsgleichungen der Integralfunktionen von f durch unbestimmte Integration erhält.

► **Def.:** Die Menge I_f, die aus allen Stammfunktionen Φ einer stetigen Funktion f besteht, heißt das unbestimmte Integral der Funktion f.

► **Def.:** Die Grundregeln für die unbestimmte Integration, die man aus den speziellen Differentiationsregeln für die elementaren analytisch darstellbaren Funktionen erhält, werden Grundintegrale genannt.

Die Relation $F'(x) = f(x)$ charakterisiert die Differentiation, weil alle Differentiationsregeln für differenzierbare Funktionen F diese Form haben. Umgekehrt charakterisiert diese Relation aber auch die unbestimmte Integration einer Funktion f, denn man kann

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

schreiben. Man sagt deshalb auch, daß die Operationen „Differentiation" und „unbestimmte Integration" Umkehrungen voneinander sind.
Diese Aussage wird als Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung bezeichnet.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Warum ist $y = \int_p^x f(t)\,dt$ mit $p \in [a; b]$ die Gleichung einer reellen, analytisch darstellbaren Funktion F_p, wenn f in $[a; b]$ stetig ist?
2. Auf welchem Begriff beruht die Definition des Begriffes „Integralfunktion einer stetigen Funktion"?
3. Ist die Definition des Begriffes „Integralfunktion einer stetigen Funktion" die Definition eines Objekts, einer Relation oder einer Eigenschaft? Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Wieviel Integralfunktionen einer in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion f gibt es?
5. Warum sind alle Integralfunktionen einer in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion f Stammfunktionen von f?
6. Was kann über die Stetigkeit der Integralfunktionen F_p einer in einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktion f ausgesagt werden? Begründen Sie Ihre Antwort!
7. Wodurch kann man die Terme $F_p(x)$ für die Funktionsgleichungen der Integralfunktionen F_p einer in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion f bestimmen?
8. Was versteht man unter dem unbestimmten Integral einer stetigen Funktion f?
9. Was sind Grundintegrale?
10. Was sagt der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung aus?

Aufgaben

1. Bilden Sie aus den gegebenen Satzpaaren Satzgefüge mit der Konjunktion „wenn", und ergänzen Sie dabei die fehlenden Wörter!
$C(\Phi_1)$ und $C(\Phi_2)$ sind die Funktionskurven zweier Stammfunktionen von f.
Diese Kurven liegen zueinander in Richtung der ... parallelverschoben.

► Wenn $C(\Phi_1)$ und $C(\Phi_2)$ die Funktionskurven zweier Stammfunktionen von f sind, so liegen diese Kurven zueinander in Richtung der Ordinatenachse parallelverschoben.

1. Eine Funktion f ist in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ differenzierbar.
Ihr Graph $C(f)$ ist eine ... ...

2. Eine Funktion f ist in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetig.
Die Funktion f ist in diesem Intervall ...

3. Der Integrand f hat im Integrationsintervall ....
$\int_a^b f(x)\,dx$ bedeutet im allgemeinen nicht die Maßzahl für den Flächeninhalt des Flächenstückes zwischen $C(f)$, der Abszissenachse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$.

4. Man vertauscht die beiden ... miteinander.
Das Vorzeichen des bestimmten Integrals ändert sich.

5. Der Differenzenquotient von F_p für die Differenz Δx wird umgeformt.
Man erhält den ... $f(x_m)$ des Integranden f über das Intervall $[x; x + \Delta x]$.

6. Man ... eine Integralfunktion F_p von f.
Man erhält den Integranden f.

7. Die ... ... einer Funktion f wird durchgeführt.
Man erhält die Menge I_f aller Stammfunktionen Φ von f.

2. Bilden Sie aus den Satzpaaren der Übung 1. konditionale Satzgefüge ohne Konjunktion, und ergänzen Sie dabei die fehlenden Wörter!
► Sind $C(\Phi_1)$ und $C(\Phi_2)$ die Funktionskurven zweier Stammfunktionen von f, so liegen diese Kurven zueinander in Richtung der Ordinatenachse parallelverschoben.

3. Bilden Sie aus den gegebenen Satzpaaren konditionale Satzgefüge ohne Konjunktion, und ergänzen Sie dabei die fehlenden Wörter!
F_1 und F_2 sind zwei Stammfunktionen einer Funktion f. Die Terme $F_1(x)$ und $F_2(x)$ unterscheiden sich voneinander nur durch einen ... ... $C \in R$.
► Sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen einer Funktion f, so unterscheiden sich die Terme $F_1(x)$ und $F_2(x)$ nur durch einen konstanten Summanden $C \in R$ voneinander.

1. Eine Funktion f ist in einem Intervall $[a; b]$ stetig.
Die Funktion f ist auch in jedem ... ... von $[a; b]$ stetig.

2. Eine Funktion f ist in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ ....
f ist zwischen den Grenzen a und b integrierbar.

3. Die Funktion f hat im Integrationsintervall nur ... Funktionswerte.
Man kann das bestimmte Integral von f geometrisch interpretieren.

4. Eine Funktion f ist in $[a; b]$ stetig.
In diesem Intervall gilt für die Funktion f der ... der Integralrechnung.

5. Die untere Integrationsgrenze und der Term $f(x)$ des ... f sind gegeben.
Der Wert des ... ... hängt nur von der oberen Integrationsgrenze ab.

6. Eine Funktion f ist in dem Intervall $[a; b]$ stetig.

$y = \int_p^x f(t)\,dt$ mit $p \in [a; b]$ ist die Gleichung einer ... dieser Funktion f.

7. Zwischen zwei Funktionen F und f besteht die Relation $F' = f$.
Die Funktion F ist eine ... von f.

4. Bilden Sie aus den Satzpaaren der Übung 3. Satzgefüge mit Attributsatz, und ergänzen Sie dabei die fehlenden Wörter!

► Unter der Bedingung, daß F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen einer Funktion f sind, unterscheiden sich die Terme $F_1(x)$ und $F_2(x)$ nur durch einen konstanten Summanden $C \in R$ voneinander.

5. Ersetzen Sie in den folgenden Satzgefügen die Attributsätze durch ein erweitertes Attribut!

Die Menge $\{C(\Phi)\}$, die aus den Funktionskurven aller Stammfunktionen $\Phi \in I_f$ besteht, heißt die Kurvenschar mit der Gleichung $y = \Phi(x) = F(x) + C$.

► Die aus den Funktionskurven aller Stammfunktionen $\Phi \in I_f$ bestehende Menge $\{C(\Phi)\}$ heißt die Kurvenschar mit der Gleichung $y = \Phi(x) = F(x) + C$.

1. Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f ist eine reelle Zahl, die nur vom Bau des Terms $f(x)$ und von den Integrationsgrenzen abhängig ist.
2. Der Integrand f ist eine Funktion, die in dem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetig ist.
3. Mit Hilfe der Relation $y = \int_p^x f(t)\,dt$ kann man eine Menge bilden, die aus unendlich vielen geordneten Zahlenpaaren besteht.
4. $y = \int_p^x f(t)\,dt$ ist die Gleichung einer Funktion F_p, die man mit Hilfe des Begriffs des bestimmten Integrals definiert.
5. Die untere Integrationsgrenze p in $\int_p^x f(t)\,dt$ ist eine feste reelle Zahl, die aus dem Integrationsintervall $[a; b]$ gewählt wurde.
6. Jede Integralfunktion F_p von f ist eine Funktion, die im Integrationsintervall $[a; b]$ differenzierbar ist.
7. Der Term, der durch Umformung des Differenzenquotienten von F_p entsteht, ist der Integralmittelwert der Funktion f über das Intervall $[x; x + \Delta x]$.

6. Ermitteln Sie für die Funktionen f mit den folgenden Gleichungen die unbestimmten Integrale, und bilden Sie Satzgefüge mit Attributsatz!

$y = f(x) = x^2$

► Das unbestimmte Integral der Funktion f mit $y = f(x) = x^2$ ist die Menge

$$I_f = \left\{\Phi \mid y = \Phi(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C;\ C \in R\right\},$$

die aus allen Stammfunktionen Φ von f besteht.

1. $y = f(x) = x \cdot \sin x$
2. $y = f(x) = \cot x$
3. $y = f(x) = x \cdot \cos x^2$
4. $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
5. $y = f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$
6. $y = f(x) = \sin^2 x$

7. Ersetzen Sie in den Satzgefügen der Übung 6. den Attributsatz durch ein erweitertes Attribut wie in Übung 5.!

8. Führen Sie den Beweis für die Aussage:

$\forall F^p: (F^p)' = f,$

wobei F^p eine Integralfunktion von f mit $F^p(x) = \int_x^p f(t)\,dt$ ist!

48. Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral einer stetigen Funktion

Da zur Berechnung bestimmter Integrale durch Grenzwertbildung meistens sehr lange und schwierige Umformungen nötig sind, benutzt man die Stammfunktionen des unbestimmten Integrals I_f einer in $[a; b]$ stetigen Funktion f, um das bestimmte Integral von f zwischen den Grenzen a und b zu berechnen.

■ *Satz:* Wenn $F \in I_f$ eine beliebige Stammfunktion einer in dem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion f ist, so kann man das bestimmte Integral von f zwischen den Grenzen a und b als Differenz aus den Funktionswerten von F an der Stelle b und an der Stelle a berechnen.

Voraussetzung: f ist in $[a; b]$ stetig, und $F \in I_p$.

Behauptung: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Beweis:

Da alle Integralfunktionen von f bezüglich $[a; b]$ Stammfunktionen von f sind, gibt es für jede feste untere Integrationsgrenze $p \in [a; b]$ eine Konstante $C_p \in R$, so daß man die Funktionsgleichung der entsprechenden Integralfunktion F_p von f in der Form

$$y = F_p(x) = \int_p^x f(t)\,dt = F(x) + C_p$$

schreiben kann. Die Funktionswerte von F_p an den Stellen a (untere Intervallgrenze) und b (obere Intervallgrenze) sind:

$$F_p(a) = \int_p^a f(t)\,dt = F(a) + C_p; \quad F_p(b) = \int_p^b f(t)\,dt = F(b) + C_p.$$

Bildet man die Differenz $F_p(b) - F_p(a)$ aus diesen Funktionswerten, so ergibt sich durch Anwendung der Eigenschaften des bestimmten Integrals:

$$\begin{aligned} F_p(b) - F_p(a) &= [F(b) + C_p] - [F(a) + C_p] = F(b) - F(a) \\ &= \int_p^b f(t)\,dt - \int_p^a f(t)\,dt = \int_p^b f(t)\,dt + \int_a^p f(t)\,dt \\ &= \int_a^p f(t)\,dt + \int_p^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Man erkennt daraus, daß zur Berechnung eines bestimmten Integrals einer in $[a; b]$ stetigen Funktion f jede beliebige Stammfunktion F von f benutzt werden kann, denn das Resultat ist von der Integrationskonstanten C unabhängig. Für die Berechnung eines bestimmten Integrals wählt man deshalb am besten die Stammfunktion F von f mit der Gleichung $y = F(x) + C_0$, wobei $C_0 = 0$ ist. Für die Differenz $F(b) - F(a)$ schreibt man symbolisch:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b.$$

Die Relation

■ $$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

sagt aus, in welchen Schritten die bestimmte Integration einer stetigen Funktion f zwischen den Grenzen a und b durchgeführt wird:

1. Man bestimmt den Term $F(x)$ der Stammfunktion F von f mit $C_0 = 0$.
2. Man berechnet die Funktionswerte von F an den Stellen b (obere Integrationsgrenze) und a (untere Integrationsgrenze).
3. Man bestimmt den Wert $F(b) - F(a)$ der Differenz aus diesen beiden Funktionswerten.

Da diese wichtige Relation den Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral einer in $[a; b]$ stetigen Funktion f zwischen den Grenzen a und b und dem unbestimmten Integral von f, d. h. den Stammfunktionen von f beinhaltet, nennt man sie den Hauptsatz der Integralrechnung.

Beispiele:

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_1^4 = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

Das gleiche Resultat ergab sich auch durch Grenzwertbildung, jedoch waren dabei viel schwierigere Rechnungen nötig.

$$\int_{-2}^{+2} \frac{1}{4} x^3\,dx = \frac{1}{16} x^4 \Big|_{-2}^{+2} = \frac{1}{16}(+2)^4 - \frac{1}{16}(-2)^4 = \frac{16}{16} - \frac{16}{16} = 0$$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Warum berechnet man bestimmte Integrale nicht durch Grenzwertbildung?
2. Was benutzt man, um das bestimmte Integral einer in $[a; b]$ stetigen Funktion f zwischen den Grenzen a und b zu berechnen?
3. Welche Funktionswerte hat die Integralfunktion F_p mit $y = F_p(x) = \int_p^x f(t)\,dt$ an den Stellen $x = a$; $x = b$; $x = 1$; $x = -2$?
4. Was bedeutet das Symbol $[F(x)]_a^b$?
5. Auf Grund welcher Relation berechnet man das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f zwischen den Grenzen a und b?
6. In welchen Schritten führt man die bestimmte Integration einer stetigen Funktion zwischen den Grenzen a und b durch?
7. Was sagt der Hauptsatz der Integralrechnung aus?

Aufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale!

1. $\int_0^2 dx$
2. $\int_{-2}^0 x^3\,dx$
3. $\int_2^0 x^2\,dx$
4. $\int_{-1}^1 2\,dx$
5. $\int_{-0,5}^{2,5} 6x\,dx$
6. $\int_0^3 x\,dx$
7. $\int_0^1 x^{12}\,dx$
8. $\int_5^1 x^2\,dx$
9. $\int_{-2}^0 -3\,dx$
10. $\int_1^3 \frac{1}{9} x^2\,dx$
11. $\int_0^4 x^2\,dx$
12. $\int_1^5 x^2\,dx$
13. $\int_0^2 \frac{1}{3} x\,dx$
14. $\int_2^3 \frac{1}{5} x^2\,dx$

2. Führen Sie die folgenden bestimmten Integrationen durch!

1. $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$
2. $\int\limits_{-3}^{-2} x^{-3}\,dx$
3. $\int\limits_{1}^{3} \frac{4}{x^3}\,dx$
4. $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$
5. $\int\limits_{-1}^{-8} \sqrt[3]{x^2}\,dx$
6. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2}$
7. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$
8. $\int\limits_{3}^{1} -\frac{10}{x^2}\,dx$
9. $\int\limits_{4}^{16} \sqrt{x}\,dx$
10. $\int\limits_{1}^{4} \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx$
11. $\int\limits_{-2}^{-1} x^{-2}\,dx$
12. $\int\limits_{2}^{1} x^{-4}\,dx$
13. $\int\limits_{0}^{8} \sqrt[3]{x^2}\,dx$
14. $\int\limits_{4}^{1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$
15. $\int\limits_{1}^{9} \sqrt{x^3}\,dx$

3. Ermitteln Sie die Werte der folgenden bestimmten Integrale!

1. $\int\limits_{1}^{2} (x^2 - 2)\,dx$
2. $\int\limits_{-1}^{+1} (x + 4)\,dx$
3. $\int\limits_{0}^{3} (3x^2 - 4x + 5)\,dx$
4. $\int\limits_{-2}^{+1} \left(5x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 3\right)dx$
5. $\int\limits_{1}^{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)dx$
6. $\int\limits_{0}^{3} (x^2 + x + 1)\,dx$
7. $\int\limits_{1}^{3} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)dx$
8. $\int\limits_{-2}^{+2} \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)dx$
9. $\int\limits_{-2}^{-1} \left(\frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right)dx$

4. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale!

1. $\int\limits_{-1}^{+1} e^x\,dx$
2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$
3. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2 + 1}$
4. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x}$
5. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos x\,dx$
6. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$
7. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

5. Integrieren Sie!

1. $\int\limits_{0}^{1} (3x - 2)^3\,dx$
2. $\int\limits_{-3}^{+3} \frac{dx}{(5 - x)^2}$
3. $\int\limits_{4}^{5} \sqrt{2x - 2}\,dx$
4. $\int\limits_{-0,1}^{+0,4} \sqrt{0,5 + x}\,dx$
5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{4x + 2}}$
6. $\int\limits_{1}^{6} \frac{12\,dx}{2 + 3x}$
7. $\int\limits_{-2}^{+2} \frac{dx}{(3 + x)^2}$
8. $\int\limits_{1}^{2} \left(\frac{1}{4}x + 1\right)^4 dx$
9. $\int\limits_{2}^{7} \sqrt{x + 2}\,dx$
10. $\int\limits_{12}^{19} \frac{dx}{\sqrt{-3 + x}}$
11. $\int\limits_{2}^{0} \frac{2\,dx}{3 - x}$

6. Berechnen Sie für die Funktionen f mit den folgenden Gleichungen die bestimmten Integrale zwischen den angegebenen Integrationsgrenzen!

1. $y = f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; $a = \frac{\pi}{4}$; $b = \frac{\pi}{2}$
2. $y = f(x) = \tan x$; $a = \frac{\pi}{6}$; $b = \frac{\pi}{3}$
3. $y = f(x) = \sin^2 x$; $a = 0$; $b = \frac{\pi}{2}$

7. Ermitteln Sie, für welche reelle Zahl (obere Integrationsgrenze) b mit $0 < b < \frac{\pi}{2}$ die Relation

$$\int\limits_{0}^{b} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)dx = \frac{1}{2}$$

erfüllt ist!

49. Berechnung des Flächeninhalts eines ebenen Flächenstückes

Flächeninhaltsberechnungen für endliche ebene Flächenstücke beruhen auf der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals.
Im einfachsten Fall wird das betreffende Flächenstück von der Kurve $C(f)$ einer stetigen Funktion f, die im Intervall $[a; b]$ nur positive Funktionswerte hat, der Abszissenachse und den beiden Parallelen zur Ordinatenachse mit den Glei-

chungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt. Die Funktionskurve $C(f)$ liegt für $a \leqq x \leqq b$ über der Abszissenachse, und das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ bedeutet geometrisch die Maßzahl des zu berechnenden Flächeninhalts A_a^b.

Beispiel:

Der Flächeninhalt A_{-2}^4 des endlichen Flächenstückes, das vom Graph $C(f)$ der Funktion f mit $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, der Abszissenachse und den Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = 4$ begrenzt wird, soll berechnet werden. $C(f)$ ist eine Parabel, die über der Abszissenachse liegt.

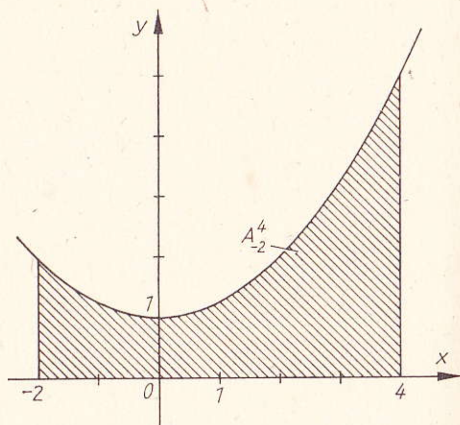


Abb. 49.1. Über der Abszissenachse liegendes Flächenstück unter einer Funktionskurve

Für die Maßzahl des gesuchten Flächeninhalts erhält man:

$$F_{-2}^4 = \int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)dx = \left[\frac{x^3}{12} + x\right]_{-2}^{4} = \left(\frac{4^3}{12} + 4\right) - \left(\frac{(-2)^3}{12} - 2\right) = 12.$$

Also ist $A_{-2}^4 = 12\ FE$.

Wenn f in $[a; b]$ nur negative Funktionswerte hat, so liegt die Funktionskurve $C(f)$ für $a \leqq x \leqq b$ unter der Abszissenachse, und das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist negativ. In diesem Fall muß als Maßzahl von A_a^b der Betrag des bestimmten Integrals genommen werden.

Beispiel:

Der Graph $C(f)$ der Funktion f mit $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist eine Hyperbel, die für $-\infty < x < 0$ unter der Abszissenachse liegt. Der Flächeninhalt A_{-7}^{-2} des endlichen Flächenstückes, das von $C(f)$, der Abszissenachse und den Geraden mit $x = -7$ und $x = -2$ begrenzt wird, hat die Maßzahl:

$$|F_{-7}^{-2}| = \left|\int_{-7}^{-2}\frac{dx}{x}\right| = |[\ln x]_{-7}^{-2}| = |\ln|-2| - \ln|-7||$$
$$\approx |0{,}693 - 1{,}946| = 1{,}253.$$

Also ist $A_{-7}^{-2} \approx 1{,}253\ FE$.

Wenn die Funktion f im Intervall $[a; b]$ Nullstellen ungerader Ordnung hat, so

schneidet die Funktionskurve $C(f)$ die Abszissenachse. $C(f)$, die Abszissenachse und die beiden Geraden mit $x = a$ und $x = b$ begrenzen deshalb mehrere endliche Flächenstücke, die zum Teil über der Abszissenachse und zum Teil unter der Abszissenachse liegen. Um den gesamten Flächeninhalt A_a^b aller dieser Flächenstücke zu berechnen, muß man zuerst die Nullstellen $x_{0_1}; x_{0_2}; \ldots; x_{0_n}$ mit $x_{0_1} \leqq x_{0_2} \leqq \ldots \leqq x_{0_n}$ bestimmen, die f im Intervall $[a; b]$ hat, und danach das Intervall $[a; b]$ in die Teilintervalle $[a; x_{0_1}]; [x_{0_1}; x_{0_2}]; \ldots; [x_{0_n}; b]$ zerlegen. Die Maßzahl $Mz(A_a^b)$ des gesuchten Flächeninhalts bestimmt man dann mit Hilfe der Relation:

$$Mz(A_a^b) = |F_a^{x_{0_1}}| + |F_{x_{0_1}}^{x_{0_2}}| + \ldots + |F_{x_{0_n}}^b|$$
$$= \left|\int_a^{x_{0_1}} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_{0_1}}^{x_{0_2}} f(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_{0_n}}^{b} f(x)\,dx\right|.$$

Beispiel:

Der Graph $C(f)$ der Funktion f mit $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$ schneidet die Abszissenachse in $P_{0_1}(x_{0_1}; 0) = P_{0_1}(2; 0)$ und in $P_{0_2}(x_{0_2}; 0) = P_{0_2}(4; 0)$. Für die Maßzahl des gesamten Flächeninhalts A_1^6 der drei endlichen Flächenstücke, die von $C(f)$, der Abszissenachse und den beiden Parallelen zur Ordinatenachse mit $x = a = 1$ und $x = b = 6$ begrenzt werden, ergibt sich:

$$Mz(A_1^6) = \left|\int_1^2 (x^2 - 6x + 8)\,dx\right| + \left|\int_2^4 (x^2 - 6x + 8)\,dx\right| + \left|\int_4^6 (x^2 - 6x + 8)\,dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_2^4\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_4^6\right|$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}.$$

Wenn zwei zusammenhängende Funktionskurven $C(f_1)$ und $C(f_2)$, die beide über der Abszissenachse liegen, einander in den Punkten $P_1(a; f_1(a)) = P_1(a; f_2(a))$ und $P_2(b; f_1(b)) = P_2(b; f_2(b))$ schneiden, so begrenzen sie ein endliches Flächenstück mit dem Flächeninhalt $A[C(f_1); C(f_2)]$.

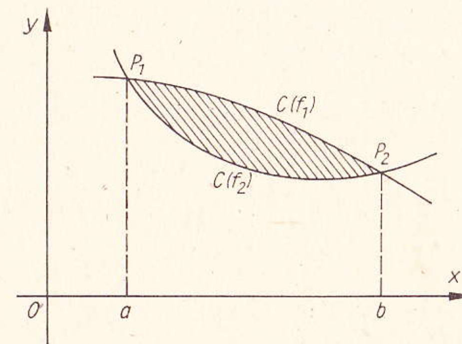


Abb. 49.2. Von zwei Funktionskurven begrenztes Flächenstück über der Abszissenachse

Diesen Flächeninhalt berechnet man auf Grund der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals nach der Relation:

$$A[C(f_1);\, C(f_2)] = \left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x \right| FE.$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob die Kurve $C(f_1)$ zwischen P_1 und P_2 über oder unter der Kurve $C(f_2)$ liegt, denn wegen

$$[f_1(x) - f_2(x)] = -[f_2(x) - f_1(x)]$$

gilt:

$$\left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x \right| = \left| -\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x \right|.$$

Die Relation für die Flächeninhaltsberechnung gilt auch in dem Fall, daß die Funktionskurven zwischen P_1 und P_2 die Abszissenachse schneiden. Diese wichtige Tatsache kann man durch die folgende Überlegung begründen.

Addiert man zu den Termen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die gleiche reelle Konstante $k \in R$, so entstehen die Terme $\varphi_1(x) = f_1(x) + k$ und $\varphi_2(x) = f_2(x) + k$ der Gleichungen von zwei Funktionen φ_1 und φ_2. Die Funktionskurven $C(\varphi_1)$ und $C(\varphi_2)$ begrenzen ein Flächenstück, das den gleichen Flächeninhalt haben muß wie das von $C(f_1)$ und $C(f_2)$ begrenzte Flächenstück, denn diese beiden Flächenstücke sind in Richtung der Ordinatenachse zueinander parallel verschoben. Deshalb haben auch die Schnittpunkte Q_1; Q_2 von $C(\varphi_1)$ und $C(\varphi_2)$ die gleichen Abszissen wie die entsprechenden Schnittpunkte P_1; P_2 von $C(f_1)$ und $C(f_2)$. Man kann die Konstante $k \in R$ so wählen, daß sowohl $C(\varphi_1)$ als auch $C(\varphi_2)$ über der Abszissenachse liegen, d. h., daß beide Funktionen φ_1 und φ_2 in $[a;\, b]$ keine Nullstellen besitzen:

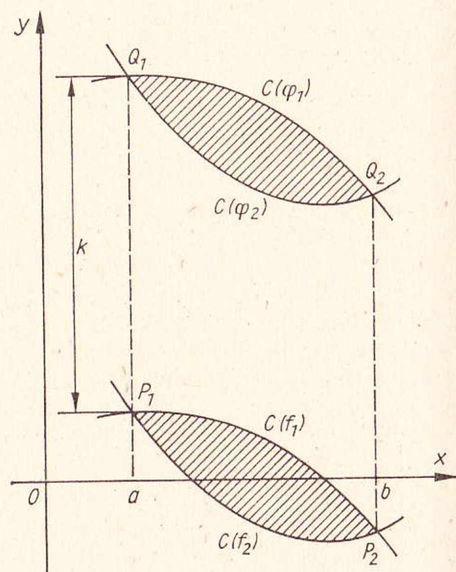


Abb. 49.3. In Richtung der Ordinatenachse parallel verschobene Flächenstücke

Auf Grund der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals ergibt sich dann für den Flächeninhalt des von $C(\varphi_1)$ und $C(\varphi_2)$ begrenzten Flächenstückes:

$$\begin{aligned} A[C(\varphi_1);\, C(\varphi_2)] &= \left| \int_a^b [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]\,\mathrm{d}x \right| FE \\ &= \left| \int_a^b [(f_1(x) + k) - (f_2(x) + k)]\,\mathrm{d}x \right| FE \\ &= \left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x \right| FE = A[C(f_1);\, C(f_2)], \end{aligned}$$

und das ist die oben angegebene Relation für die Flächeninhaltsberechnung.

Beispiel:

Die Kurven $C(f_1)$ und $C(f_2)$ der Funktionen f_1 und f_2 mit den Gleichungen
$y = f_1(x) = \frac{3}{4}x^2 - 1$
und
$y = f_2(x) = x^2 - 2$
sind Parabeln, die einander in den Punkten $P_1(-2;\, 2)$ und $P_2(2;\, 2)$ schneiden.

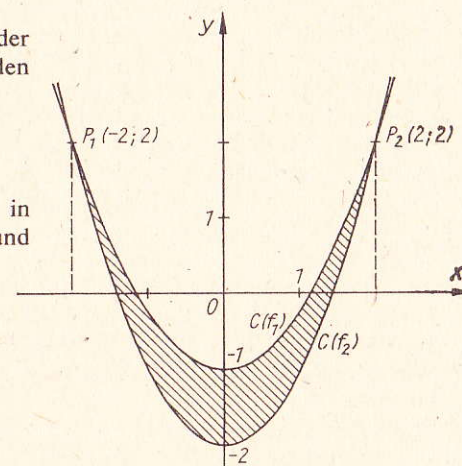


Abb. 49.4. Von zwei Parabeln begrenztes Flächenstück

Der Flächeninhalt des endlichen Flächenstückes, das von diesen Parabeln begrenzt wird, ist:

$$\begin{aligned} A[C(f_1);\, C(f_2)] &= \left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x \right| FE = \left| \int_{-2}^{+2} \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) \mathrm{d}x \right| FE \\ &= \left| \left[\left(x - \frac{1}{12}x^3\right)\right]_{-2}^{+2} \right| FE = \frac{8}{3} FE. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt eines von zwei Funktionskurven begrenzten endlichen Flächenstückes wird also in folgenden Schritten bestimmt:

1. Man berechnet die Abszissen a und b der Schnittpunkte von $C(f_1)$ und $C(f_2)$.
2. Man bildet die Differenz $[f_1(x) - f_2(x)]$ für den Integranden.
3. Man berechnet das bestimmte Integral $\left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x \right|$.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Worauf beruhen Flächeninhaltsberechnungen für endliche ebene Flächenstücke?
2. Unter welcher Bedingung ist das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ die Maßzahl des Flächeninhalts eines endlichen Flächenstückes, das von einer Funktionskurve $C(f)$, der Abszissenachse und den Geraden mit $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird?
3. Wie erhält man die Maßzahl des Flächeninhalts A_a^b eines endlichen Flächenstückes, das von einer unter der Abszissenachse liegenden Funktionskurve $C(f)$, der Abszissenachse und den beiden Geraden mit $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird?
4. Wie bestimmt man die Maßzahl des gesamten Flächeninhalts A_a^b aller endlichen Flächenstücke, die von einer Funktionskurve $C(f)$, der Abszissenachse und den Geraden mit $x = a$ und $x = b$ begrenzt werden, wenn f in $[a; b]$ Nullstellen ungerader Ordnung hat?
5. Nach welcher Relation berechnet man den Flächeninhalt eines endlichen Flächenstückes, das von zwei einander schneidenden Funktionskurven $C(f_1)$ und $C(f_2)$ begrenzt wird?
6. Warum gilt die Relation für die Flächeninhaltsberechnung eines endlichen, von zwei einander schneidenden Funktionskurven $C(f_1)$ und $C(f_2)$ begrenzten Flächenstückes auch für den Fall, daß $C(f_1)$ oder $C(f_2)$ zwischen ihren Schnittpunkten die Abszissenachse schneiden?
7. Wie bestimmt man die Abszissen der Schnittpunkte von zwei Funktionskurven?
8. In welchen Schritten wird die Berechnung des Flächeninhalts eines endlichen Flächenstückes, das von zwei einander schneidenden Funktionskurven begrenzt wird, durchgeführt?
9. Wie kann man den gesamten Flächeninhalt aller endlichen Flächenstücke berechnen, die von zwei Funktionskurven $C(f_1)$ und $C(f_2)$ begrenzt werden, wenn $C(f_1)$ und $C(f_2)$ einander in mehr als zwei Punkten schneiden?

Aufgaben

1. Bilden Sie aus den gegebenen Hauptsätzen Satzgefüge, indem Sie das erweiterte Attribut durch einen Nebensatz (Attributsatz) ersetzen!

Das Flächenstück wird von der Kurve einer im Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion f, der Abszissenachse und zwei Parallelen zur Ordinatenachse begrenzt.

► Das Flächenstück wird von der Kurve einer Funktion f, die im Intervall $[a; b]$ stetig ist, der Abszissenachse und zwei Parallelen zur Ordinatenachse begrenzt.

1. Die Funktion f hat für das Intervall $[a; b]$ einen unter der Abszissenachse liegenden Graph.

2. Für eine über der Abszissenachse liegende Funktionskurve $C(f)$ bedeutet das bestimmte Integral die Maßzahl des zu berechnenden Flächeninhalts.
3. Eine die Abszissenachse in mehreren Punkten schneidende Funktionskurve $C(f)$ und die Abszissenachse begrenzen mehrere endliche Flächenstücke.
4. Die in dem Intervall $[a; b]$ zu bestimmenden Nullstellen der Funktion f sind $x_{0_1}; x_{0_2}; \ldots; x_{0_n}$.
5. Mit Hilfe dieser Relation kann man den Flächeninhalt eines von zwei Funktionskurven $C(f_1)$ und $C(f_2)$ begrenzten endlichen Flächenstückes berechnen.
6. Das sich durch Parallelverschiebung in Richtung der Ordinatenachse ergebende Flächenstück muß den gleichen Flächeninhalt haben wie das ursprüngliche Flächenstück.
7. Die Integrationsgrenzen sind die mit Hilfe der Relation $f_1(x) = f_2(x)$ ermittelten Abszissen der Schnittpunkte von $C(f_1)$ und $C(f_2)$.

2. Stellen Sie die Funktionen f mit den folgenden Gleichungen für die jeweils angegebenen Intervalle graphisch dar, und berechnen Sie den Flächeninhalt des endlichen Flächenstückes, das von $C(f)$, der Abszissenachse und den Geraden mit $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird!

1. $y = f(x) = x^2; \quad [-4; -2]$
2. $y = f(x) = -x^2 + 4; \quad \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$
3. $y = f(x) = x^{-2}; \quad [-3; -1]$
4. $y = f(x) = x^3; \quad [1; \sqrt{2}]$

3. Ermitteln Sie für die Funktionen f mit den folgenden Gleichungen den Flächeninhalt des endlichen Flächenstückes, das von $C(f)$ und der Abszissenachse begrenzt wird!

1. $y = f(x) = -x^2 + 1$
2. $y = f(x) = -x(x - 4)$
3. $y = f(x) = x^3 - 4x^2$
4. $y = f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

4. Die Querschnittsfläche eines Wasserstollens ist ein Parabelsegment (siehe Abbildung!). Der Wasserstollen hat eine Sohlenbreite von 4 m.

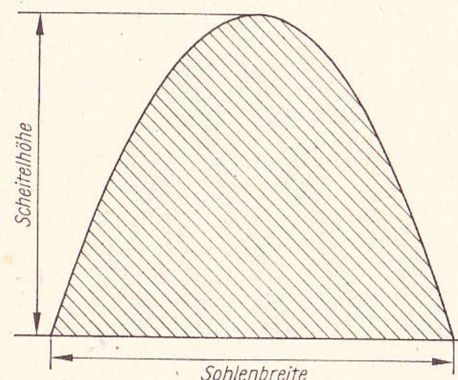


Abb. 49.5. Querschnittsfläche eines Wasserstollens

1. Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieser Querschnittsfläche, wenn die Gleichung der Parabel $y = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{16}{5}$ lautet!

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von Wasser durchflossenen Querschnittsfläche, wenn der Wasserstollen bis zur halben Scheitelhöhe mit Wasser gefüllt ist!
3. Wieviel Kubikmeter Wasser fließen pro Minute durch den Wasserstollen, wenn er bis zur halben Scheitelhöhe gefüllt ist und die Strömungsgeschwindigkeit $v = 2{,}5\ \text{m/s}^{-1}$ beträgt?

5. Beweisen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die folgenden Formeln zur Berechnung von Flächeninhalten!
1. Rechteckfläche: $A = a \cdot b$
Wählen Sie für das Rechteck die Eckpunkte $P_1(0;\,0)$, $P_2(a;\,0)$, $P_3(a;\,b)$ und $P_4(0;\,b)$!
2. Fläche des rechtwinkligen Dreiecks: $A = \frac{1}{2}\,a \cdot b$
(a; b: Längen der Katheten)
3. Parabelsegment:
$A = \frac{2}{3}\,h \cdot s$ (siehe Abbildung!)

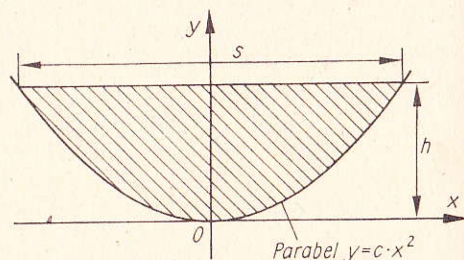


Abb. 49.6. Parabelsegment

6. Bestimmen Sie für die Funktionen f den gesamten Flächeninhalt aller endlichen Flächenstücke, die von $C(f)$, der Abszissenachse und den Geraden mit $x = a$ und $x = b$ begrenzt werden! Prüfen Sie zuerst, ob die Funktionen in den angegebenen Intervallen Nullstellen haben!
1. $y = f(x) = x^3$; $[-2;\,3]$
2. $y = f(x) = x^2 - x - 6$; $[2;\,4]$
3. $y = f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$; $[1;\,3]$

7. Berechnen Sie für die Funktionen f den Flächeninhalt des Flächenstückes, das von $C(f)$, der Abszissenachse und den Parallelen zur Ordinatenachse mit $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird!
1. $y = f(x) = x$; $a = 0$; $b = 1$
2. $y = f(x) = e^x - 1$; $a = 0$; $b = 1$
3. $y = f(x) = \sin x + \cos x$; $a = \frac{\pi}{4}$; $b = \frac{\pi}{2}$

8. Ermitteln Sie durch eine Kurvendiskussion den Graph $C(f)$ der Funktion f mit $y = f(x) = x^3 - 3x$ für das Intervall $[-3;\,3]$! Berechnen Sie danach den Flächeninhalt des von $C(f)$, der Abszissenachse und den Geraden mit $x = -3$ und $x = 3$ begrenzten endlichen Flächenstückes!

9. Begründen Sie, daß für jede in $[-a;\,+a]$ stetige gerade Funktion f die Relation

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{+a} f(x)\,dx$$

gilt!

10. Skizzieren Sie die Graphen von jeweils zwei der Funktionen im gleichen Koordinatensystem! Berechnen Sie danach die Flächeninhalte der von je zwei der Graphen begrenzten Flächenstücke!
1. $y = f_1(x) = x^2 + 1$ und $y = f_2(x) = -x^2 + 9$
2. $y = f_1(x) = x^2 - 6x + 8$ und $y = f_2(x) = 3x^2 - 18x + 24$
3. $y = f_1(x) = -x^2 + c$ und $y = f_2(x) = x^2 - c$ $(c > 0)$

11. Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ wird an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten gespiegelt.
Zeichnen Sie die Parabel und ihr Spiegelbild, und berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes, das von beiden Kurven begrenzt wird!

12. Ermitteln Sie die Flächeninhalte der endlichen Flächenstücke, die von den Kurven mit den jeweils gegebenen Gleichungen begrenzt werden! Skizzieren Sie zuerst diese Kurven!
1. $y = f(x) = x^2$; $y = g(x) = \sqrt{x}$
2. $y = f(x) = x^3$; $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$
3. $y = f(x) = -x^2 + x + 6$; $y = g(x) = 1$; $x = -1$; $x = 2$
4. $y = f(x) = x^3 - 9x$; $y = g(x) = 4x + 12$

13. Das endliche Flächenstück, das von der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2$, der Abszissenachse und der Geraden mit $x = 6$ begrenzt wird, soll durch eine Parallele zur Ordinatenachse in zwei Teile mit gleichem Flächeninhalt zerlegt werden. Welchen Abstand muß diese Parallele von der Ordinatenachse haben?

50. Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers

Wenn die Kurve $C(f)$ einer in $[a;\,b]$ stetigen Funktion f um die Abszissenachse rotiert, so beschreibt jeder Punkt $P \in C(f)$ einen Kreis um die Abszissenachse. Alle diese unendlich vielen Kreise bilden eine Rotationsfläche ϱ_x. Die Abszissenachse ist die Symmetrieachse dieser Rotationsfläche. Man nennt sie auch die Figurenachse von ϱ_x.

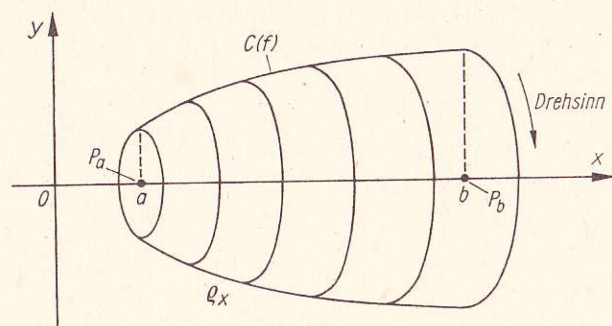


Abb. 50.1. Rotationsfläche

Wählt man zwei zur Abszissenachse orthogonale Ebenen η_a und η_b, die die Abszissenachse in den Punkten $P_a(a; 0)$ bzw. $P_b(b; 0)$ schneiden, so begrenzen η_a, η_b und die Rotationsfläche ϱ_x einen Rotationskörper $\varkappa_x$.
Um das Volumen eines solchen Rotationskörpers zu berechnen, zerlegt man das Intervall $[a; b] = [x_0; x_n]$ in n Teilintervalle $[x_{k-1}; x_k]$ mit $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$, wählt aus jedem Teilintervall $[x_{k-1}; x_k]$ eine beliebige Stelle $\bar{x}_k$ und bildet die Summe:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot [f(\bar{x}_k)]^2 \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot [f(\bar{x}_k)]^2 \cdot \Delta x_k .$$

Das ist aber eine n-te Näherungssumme der Funktion φ mit der Gleichung $y = \varphi(x) = \pi \cdot [f(x)]^2$, und φ ist in $[a; b]$ stetig, weil f in $[a; b]$ stetig ist.

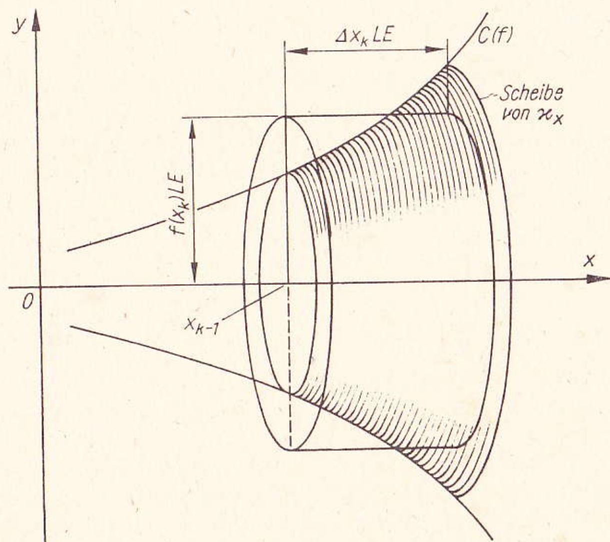


Abb. 50.2. Zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers

Jeder Summand $\pi \cdot [f(\bar{x}_k)]^2 \cdot \Delta x_k$ von S_n bedeutet geometrisch die Maßzahl des Volumens für eine zylindrische Scheibe mit dem Radius $f(\bar{x}_k)$ *LE* und der Dicke Δx_k *LE*.

Die Summe S_n ist deshalb ein Näherungswert für die Maßzahl des Volumens von $\varkappa_x$.
Man erkennt sofort, daß man die Maßzahl des Volumens V_{rot_x} dieses Rotationskörpers durch die Grenzwertbildung $Mz(V_{\text{rot}_x}) = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} S_n$ erhält. Da φ in $[a; b]$ stetig und deshalb integrierbar ist, muß dieser Grenzwert das bestimmte Integral von φ zwischen den Grenzen a und b sein:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} S_n = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 \, dx .$$

Das Volumen V_{rot_x} des Rotationskörpers $\varkappa_x$ berechnet man deshalb nach der Relation:

■ $$V_{\text{rot}_x} = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \; VE .$$

Wenn f in $[a; b]$ stetig und monoton ist und die Funktionskurve $C(f)$ um die Ordinatenachse rotiert, so entsteht eine Rotationsfläche mit der Ordinatenachse als Figurenachse. Für das Volumen des Rotationskörpers, der von dieser Fläche und zwei zur Ordinatenachse orthogonalen Schnittebenen durch die Punkte $Q_c(0; c)$ und $Q_d\ (0; d)$ begrenzt wird, ergibt sich analog:

■ $$V_{\text{rot}_y} = \pi \cdot \int_c^d [\bar{f}(y)]^2 \, dy \; VE .$$

$\bar{f}$ ist dabei die Umkehrfunktion von f.

Beispiel:

Die Kurve $C(f)$ der Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist ein Halbkreis mit dem Radius r *LE* und dem Mittelpunkt $M(0; 0) = 0(0; \Theta)$. Rotiert dieser Halbkreis um die Abszissenachse, so entsteht eine Kugel, die einen Kugelkörper begrenzt. Sein Volumen ist:

$$V_{\text{rot}_x} = \pi \cdot \int_{-r}^{+r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \; VE = \pi \cdot \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2) \, dx \; VE$$
$$= \pi \cdot \left[\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{-r}^{+r} VE = \pi \cdot \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right] VE$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \; VE .$$

Das ist die aus der Stereometrie bekannte Formel zur Berechnung des Volumens eines Kugelkörpers.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Was entsteht, wenn die Kurve einer in $[a; b]$ stetigen und monotonen Funktion f um die Abszissenachse oder um die Ordinatenachse rotiert?
2. Was ist ein Rotationskörper?
3. Was versteht man unter der Figurenachse eines Rotationskörpers?
4. Was bedeutet jeder Summand der n-ten Näherungssumme

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \pi[f(\bar{x}_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

   geometrisch?
5. Nach welcher Relation berechnet man das Volumen eines Rotationskörpers, dessen Symmetrieachse die Abszissenachse ist?
6. Welche Relation benutzt man zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers mit der Ordinatenachse als Figurenachse?
7. Sind die Integrationsgrenzen a und b in $\pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$ Werte der Variablen x oder Werte der Variablen y?

Aufgaben

1. Leiten Sie die Formel für die Berechnung des Volumens eines Kegelstumpfes mit Hilfe der Integralrechnung her!

2. Wenn die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die Abszissenachse rotiert, so entsteht ein Rotationsellipsoid. Bestimmen Sie dessen Volumen!

3. Der Graph der Funktion f mit $y = f(x) = \sin x$ rotiert um die Abszissenachse und erzeugt eine Rotationsfläche. Diese Fläche und die beiden zur Abszissenachse orthogonalen Ebenen durch $0(0; 0)$ und $P(2\pi; 0)$ begrenzen einen Rotationskörper. Ermitteln Sie dessen Volumen!

4. Begründen Sie die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ für die Berechnung des Volumens für den Körper eines geraden Kreiskegels mit Hilfe der Integralrechnung!

Lineare Gleichungssysteme

51. Determinanten und lineare Gleichungssysteme

Wir wollen Determinanten als Hilfsmittel zur Lösung von linearen Gleichungssystemen kennenlernen.

51.1. Begriff der Determinante

■ Ein quadratisches Schema aus n^2 Elementen in n Zeilen und n Spalten mit einem zugeordneten Wert D heißt eine n-reihige Determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$$

Die horizontalen Reihen heißen Zeilen, die vertikalen Reihen heißen Spalten. Das Element a_{ik} steht in der i-ten Zeile und in der k-ten Spalte. Der erste Index eines Elementes gibt also immer die Zeile an, der zweite Index die Spalte.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 2 & 11 & 7 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = D$$

Bei dieser 3-reihigen Determinante steht die Zahl 7 in der 2. Zeile und in der 3. Spalte. Deshalb ist 7 das Element a_{23}. Das Element a_{12} ist die Zahl 5. Die Diagonale von links oben nach rechts unten heißt die Hauptdiagonale. Die Diagonale von links unten nach rechts oben heißt die Nebendiagonale.

51.2. Berechnung von Determinanten

51.2.1. Zweireihige Determinanten

■ $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Man erhält den Wert einer zweireihigen Determinante, indem man das Produkt

aus den Elementen in der Hauptdiagonale und das Produkt aus den Elementen der Nebendiagonalen bildet und von beiden die Differenz berechnet.

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 52 \end{vmatrix} = 104 - 42 = 62$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 17 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 50 + 51 = 101$$

$$\begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 12 = -24$$

51.2.2. n-reihige Determinanten

Man berechnet eine n-reihige Determinante, indem man sie nach den Elementen einer Reihe entwickelt.
Man bildet eine algebraische Summe aus n Produkten. Jedes Produkt hat als Faktoren ein Element der Reihe und die zugehörige Unterdeterminante vom Grad $(n-1)$. Das Vorzeichen des Produkts ist plus bzw. minus, wenn die Indexsumme des Elementes gerade bzw. ungerade ist.
Man erhält die zu a_{ik} gehörige Unterdeterminante U_{ik}, indem man die i-te Zeile und die k-te Spalte streicht.

Beispiel:

Wir entwickeln die folgende 4-reihige Determinante nach den Elementen der 1. Spalte.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Beispiel:

Wir entwickeln die folgende 3-reihige Determinante nach der 1. Zeile.

■
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1(5 - 8) - 2(10 + 12) + 3(4 + 3)$$
$$= -3 - 44 + 21 = -26$$

51.3. Lösen von linearen Gleichungssystemen

51.3.1. Lineare Gleichungssysteme aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen

Ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen ist z. B.:

$$3x + 4y = 7$$
$$7x - 2y = 9$$

Allgemein kann man ein Gleichungssystem dieser Art folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Die letzte Schreibweise ist am besten geeignet, Gleichungssysteme allgemein zu schreiben. Wenn man Doppelindizes gebraucht, kann man auch ein Gleichungssystem aus beliebig vielen Gleichungen allgemein schreiben. Wir beachten, daß die konstanten Glieder auf der rechten Seite stehen.
Wir wollen das Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \quad \cdot a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \quad \cdot (-a_{12}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \quad \cdot (-a_{21}) \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \quad \cdot a_{11} \end{aligned}$$

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Wir sehen, daß wir für x und y zwei Brüche erhalten haben. Im Zähler und Nenner stehen Differenzen von Produkten aus je zwei Faktoren. Deshalb können wir die Zähler und Nenner auch als 2-reihige Determinanten schreiben:

■
$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}$$

Im Nenner steht sowohl bei x als auch bei y die Koeffizientendeterminante D, die aus den Koeffizienten der Variablen gebildet wird. Die Determinanten D_x und D_y erhält man, indem man in D die Koeffizienten von x bzw. die Koeffizienten von y durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt.
Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung, wenn $D \neq 0$ ist.

Beispiel:

$$3x - 2y = 14$$
$$-x + 4y = -18$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -18 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{56 - 36}{12 - 2} = \frac{20}{10} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ -1 & -18 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-54 + 14}{10}$$

$$= \frac{-40}{10} = -4$$

$$L = \{(2; -4)\}$$

Man sieht, daß man mit Hilfe der Determinanten eine übersichtliche und deshalb einprägsame Lösungsformel für lineare Gleichungssysteme aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen erhält. Wir wollen sie verallgemeinern.

51.3.2. Lineare Gleichungssysteme aus n Gleichungen mit n Variablen

Die allgemeine Schreibweise eines linearen Gleichungssystems aus n Gleichungen mit n Variablen ist folgende:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Wenn dieses Gleichungssystem eine Lösung hat, so besteht diese aus n Komponenten. Sie ist ein n-tupel: $(x_1; x_2; \dots x_n)$.
Durch Verallgemeinerung der Lösung, die für ein lineares Gleichungssystem aus 2 Gleichungen mit 2 Variablen hergeleitet wurde, ergibt sich als Lösung dieses Systems:

■ $x_1 \cdot D = D_1;\ x_2 \cdot D = D_2;\ \dots;\ x_n \cdot D = D_n$

Dabei ist D die Koeffizientendeterminante:

■
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

■ Die D_i bildet man aus der Koeffizientendeterminante D, indem man die i-te Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};\quad \dots$$

Ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen mit n Variablen kann drei verschiedene Arten von Lösungen haben.

■ 1. Das Gleichungssystem hat **genau eine** Lösung.

Die Koeffizientendeterminante ist ungleich 0. ($D \neq 0$)

$x_i = \dfrac{D_i}{D}$; die Division ist definiert, weil der Nenner ungleich 0 ist; die Division ist eindeutig ausführbar. Die **Gleichungen** sind linear **unabhängig** voneinander.

■ 2. Das Gleichungssystem hat **keine** Lösung.

Die Koeffizientendeterminante ist 0, und mindestens eine Determinante D_i ist ungleich 0. ($D = 0$; $D_i \neq 0$)
Die Gleichung $x_iD = D_i$ hat keine Lösung, denn die linke Seite ist 0, die rechte Seite ist ungleich 0. Die **Gleichungen widersprechen einander.**

■ 3. Das Gleichungssystem hat **unendlich viele** Lösungen.

Die Koeffizientendeterminante und die Determinanten D_i sind 0. ($D = 0$; $D_i = 0$)
Die Gleichung $x_iD = D_i$ hat unendlich viele Lösungen; denn für unendlich viele Werte x_i gilt $x_i \cdot 0 = 0$.

Die **Gleichungen** sind linear **abhängig** voneinander.

Wir schreiben diese Erkenntnisse über das Lösen von linearen Gleichungssystemen aus n Gleichungen mit n Variablen noch einmal im Überblick:

D	D_i	Lösungsmenge	Gleichungen
$\neq 0$	beliebig	genau eine Lösung $L = \{(x_1; x_2 \dots x_i \dots x_n)\}$ mit $x_i = \dfrac{D_i}{D}$	sind linear unabhängig voneinander
$= 0$	$\neq 0$	keine Lösung	widersprechen einander
$= 0$	$= 0$	unendlich viele Lösungen	sind linear abhängig voneinander

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} x + y - 5z &=& 3 \\ 2x - y - z &=& 9 \\ -x + 3y - 7z &=& -7 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 1(7 + 3) - 1(-14 - 1) - 5(6 - 1) = 10 + 15 - 25 = 0$$

Es gibt unendlich viele oder keine Lösungen.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 9 & -1 & -1 \\ -7 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 3(7 + 3) - 1(-63 - 7) - 5(27 - 7) = 30 + 70 - 100 = 0$$

Es gibt unendlich viele Lösungen.

Man setzt für eine Variable einen Parameter ein; das heißt, man arbeitet beim Lösen des Gleichungssystems mit diesem Parameter wie mit einem konstanten Wert.

Parameter $t \in R$; $z = t$

$$\begin{aligned} x + y &= 3 + 5t \\ 2x - y &= 9 + t \\ -x + 3y &= -7 + 7t \end{aligned}$$

Das ist ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit zwei Variablen. Wir lösen ein System aus zwei Gleichungen. Die Lösung muß **in diesem Fall** auch die dritte Gleichung erfüllen, weil die drei Gleichungen linear abhängig sind.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 + 5t \\ 2x - y &= 9 + t \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3+5t & 1 \\ 9+t & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3 - 5t - 9 - t}{-1 - 2} = \frac{-6t - 12}{-3} = 2t + 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3+5t \\ 2 & 9+t \end{vmatrix}}{-3} = \frac{9 + t - 6 - 10t}{-3} = \frac{-9t + 3}{-3} = 3t - 1$$

$L = \{(2t + 4; 3t - 1; t)\}$ mit $t \in R$

Setzt man für den Parameter t eine bestimmte reelle Zahl ein, so erhält man eine spezielle Lösung. Zum Beispiel $t = 5$ ergibt (14; 14; 5). Da man für t jede beliebige reelle Zahl einsetzen kann, gibt es unendlich viele Lösungen.

51.3.3. Homogene Gleichungssysteme

► **Def.:** Wenn bei einem Gleichungssystem alle $b_i = 0$ sind, so heißt das Gleichungssystem homogen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 2x - y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

Folgerung:

Bei einem homogenen Gleichungssystem sind alle Determinanten D_i gleich 0; denn in D_i besteht die i-te Spalte nur aus Nullen.

Bei einem homogenen linearen Gleichungssystem gibt es nur zwei Arten von Lösungen:

1. Das homogene Gleichungssystem hat **genau eine** Lösung. Die Koeffizientendeterminante D ist ungleich 0 ($D \neq 0$). Das Gleichungssystem hat die **triviale** Lösung.
$L = \{(0; 0; \ldots; 0)\}$
2. Das homogene Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Aus $D = 0$ folgt $x_i \cdot 0 = 0$ mit unendlich vielen Lösungen neben der trivialen Lösung.

Ein homogenes Gleichungssystem hat also immer mindestens eine Lösung, die triviale Lösung, bei der alle Variablen Null sind. Beim Einsetzen dieser Lösung sind nicht nur alle rechten Seiten der Gleichungen Null, sondern auch alle linken Seiten.

Anmerkung: Gleichungssysteme, bei denen wenigstens ein $b_i \neq 0$ ist, nennt man inhomogene Gleichungssysteme.

51.3.4. Lineare Gleichungssysteme aus n Gleichungen mit m Variablen

■ Ein Gleichungssystem aus n *Gleichungen* mit m *Variablen* hat im allgemeinen für

$n > m$ keine Lösung
$n = m$ genau eine Lösung
$n < m$ unendlich viele Lösungen

Beispiel:

$n > m$ $\quad 3x - 10 = 0 \quad n = 2;\ m = 1;\ L = \emptyset$
$\quad x + 1 = 5$

Wenn $n > m$ ist, so löst man ein System aus m Gleichungen und prüft dann, ob die Lösung auch die restlichen $(n - m)$ Gleichungen erfüllt.

$n = m$ $\quad 2x - y = 3 \quad n = 2;\ m = 2;\ L = \{(4; 5)\}$
$\quad x + 2y = 14$

Den Fall $n = m$ haben wir in 51.3. genauer untersucht.

$n < m$ $\quad x + y = 10 \quad n = 1;\ m = 2;\ L = \{(t; 10 - t)\}$

Wenn $n < m$ ist, das heißt $m = n + g$ ($g \in G^+$), wählt man g Variable als Parameter. Dann löst man das Gleichungssystem aus n Gleichungen mit n Variablen.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Was ist eine k-reihige Determinante?
2. Wo steht das Element k_{43} in einer Determinante?
3. Wie berechnet man den Wert einer zweireihigen Determinante?
4. Welchen Wert hat die Determinante $\begin{vmatrix} r & s \\ t & u \end{vmatrix}$?
5. Wie berechnet man den Wert einer n-reihigen Determinante?
6. Wie erhält man die zu dem Element a_{rs} gehörige Unterdeterminante D_{rs}?
7. Welches Vorzeichen erhält das Produkt aus dem Element a_{33} und der Unterdeterminante D_{33}?

8. Wie ist die allgemeine Schreibweise für ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen mit n Variablen?
9. Warum heißt D bei einem linearen Gleichungssystem die Koeffizientendeterminante?
10. Wie erhält man aus der Koeffizientendeterminante D die Determinante D_i?
11. Unter welcher Bedingung sind die Gleichungen eines linearen Gleichungssystems **unabhängig** voneinander?
12. Unter welcher Bedingung sind die Gleichungen eines linearen Gleichungssystems **abhängig** voneinander?
13. Unter welcher Bedingung widersprechen die Gleichungen eines linearen Gleichungssystems einander?
14. Wieviel Lösungen hat ein lineares Gleichungssystem aus n voneinander unabhängigen Gleichungen mit n Variablen?
15. Wieviel Lösungen hat ein lineares Gleichungssystem aus n voneinander abhängigen Gleichungen mit n Variablen?
16. Wieviel Lösungen hat ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen, die einander widersprechen?
17. Was ist ein homogenes Gleichungssystem?
18. Hat ein homogenes Gleichungssystem immer eine Lösung?
19. Hat ein homogenes, lineares Gleichungssystem immer genau eine Lösung?
20. Können die Gleichungen eines homogenen Gleichungssystems einander widersprechen?
21. Wieviel Lösungen hat *im allgemeinen* ein lineares Gleichungssystem aus p Gleichungen mit r Variablen,
    wenn $p = r$ ist,
    wenn $p > r$ ist und
    wenn $p < r$ ist?
22. Wie löst man im allgemeinen ein lineares Gleichungssystem aus r Gleichungen mit $r + s$ Variablen?

Aufgaben

1. Berechnen Sie folgende Determinanten!

1. $\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 25 & 50 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 15t & -12 \\ 20t & 10 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 45 & 65 \\ 19 & 26 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -12 & 24t \\ -17 & t \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 15 & -17 \\ -61 & 70 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 7 & 9 & 16 \\ -3 & -6 & 12 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} x^2 & z \\ xy & y^2 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 3 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

2. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme!
Geben Sie die Art der Lösung an!

1. $\begin{aligned} 3x - 4y &= -25 \\ 2x + 3y &= 6 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x + y - 7z &= -1 \\ x + 2y - 10z &= -2 \\ 3x - y - 9z &= 1 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x + y - 7z &= -1 \\ x + 2y - 10z &= -2 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -3x - y + z &= -2 \\ -x - y + z &= -6 \\ 2x + 5y - z &= 24 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 4x + 5y &= -33 \\ 3x - 2y &= 4 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x - 3y &= -4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 3x + 4y - 2z &= -1 \\ x + y - z &= 2 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ 5x - 3y + z &= 2 \end{aligned}$

3. ersetzen A durch A

D_i

► Man bildet die Determinante D_i, indem man in der Koeffizientendeterminante die i-te Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt.

D_1; D_3; D_5; D_k

4. streichen, strich, gestrichen

U_{ik} / a_{ik}

► Man erhält die zu a_{ik} gehörige Unterdeterminante U_{ik}, indem man in der Determinante die i-te Zeile und die k-te Spalte streicht.

U_{23} / a_{23}; U_{54} / a_{54}

5. ein lineares Gleichungssystem aus *n* Gleichungen mit *n* Variablen

$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 5 \end{aligned}$

► Das ist ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen.

1. $\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ 2x + y - z &= 3 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x \quad - z &= 2 \end{aligned}$

6. eine (keine) Lösung sein / (nicht) alle Gleichungen erfüllen

(1; 2; 5; −3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$
$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3$

► Das 4-tupel (1; 2; 5; −3) ist eine Lösung des Gleichungssystems mit 4 Variablen, weil es alle Gleichungen erfüllt.

1. (1; 2; 3) $x + y + z = 6$
$2x - y = 0$
$x - y + z = 2$
2. (1; 2; 3) $x + y + z = 6$
$2x - y = 0$
$x - y + z = 5$
3. Wertepaar (−2; −4) $x - y = 2$
$x + y = 6$
4. Wertepaar (−1; 4) $x + y = 7$
$2x - y = 5$

Vektorrechnung

52. Skalare und vektorielle Größen

In den Naturwissenschaften und in der Technik unterscheidet man skalare und vektorielle Größen.
So gehören z. B. zu den skalaren Größen die Länge, die Zeit, die Masse, die Arbeit und die Energie. Eine skalare Größe wie z. B. die Masse m eines Körpers ist bei gegebener Einheit durch eine einzige reelle Zahl (Zahlenwert der Größe) vollständig bestimmt.

m	=	3	kg
skalare Größe		Zahlenwert	Einheit

Deshalb lassen sich Zusammenhänge zwischen skalaren Größen mit Hilfe von reellen Zahlen und ihren Rechengesetzen mathematisch beschreiben. Skalare Größen können wie die reellen Zahlen auf einer Zahlengeraden bzw. auf einer **Skale** geometrisch dargestellt werden. Das erklärt ihre Bezeichnung.
Vektorielle Größen sind z. B. die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, die Kraft und die elektrische Feldstärke. Diese Größen können nicht durch eine einzige reelle Zahl charakterisiert werden. Betrachten wir z. B. als vektorielle Größe die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs, das sich mit $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ geradlinig von A nach B bewegt.
Zur vollständigen Charakterisierung der Geschwindigkeit des Fahrzeugs gehören

1. **der Betrag,**
den die Geschwindigkeit hat $\left(40 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$
2. **die Richtung,**
in der die Bewegung erfolgt (Richtung der Verbindungsgeraden g_{AB})
3. **der Durchlaufsinn** (die Orientierung),
mit dem die Bewegung erfolgt (von A nach B).

Wie die Geschwindigkeit wird jede vektorielle Größe durch einen Betrag (reelle Zahl und Einheit), durch eine Richtung und einen für diese Richtung angegebenen Durchlaufsinn charakterisiert.
Zur geometrischen Darstellung von vektoriellen Größen benutzt man Pfeile.

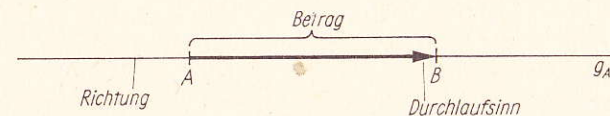


Abb. 52.1. Geometrische Darstellung von vektoriellen Größen

■ Dabei kennzeichnet die Länge des Pfeils den Betrag der vektoriellen Größe. Die Pfeilspitze gibt den Durchlaufsinn an, die Gerade, auf der der Pfeil liegt, stellt die Richtung der vektoriellen Größe dar. Einen Pfeil mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B bezeichnet man mit $\boldsymbol{AB}$.

Sehr wichtig ist, daß man zwischen vektoriellen Größen und ihrer Veranschaulichung durch einen Pfeil unterscheidet. Der Pfeil ist die geometrische Darstellung einer vektoriellen Größe. Pfeil und vektorielle Größe sind nicht identisch. Es ist z. B. die vektorielle Größe Geschwindigkeit eine physikalische Größe. Der Pfeil, der eine bestimmte Geschwindigkeit veranschaulicht, ist jedoch ein geometrisches Objekt.
Zur Bezeichnung von vektoriellen Größen benutzt man oft kleine lateinische Buchstaben mit einem Pfeil. Aus technischen Gründen kommen in diesem Buch alle Vektoren im halbfetten, kursiven Druck. So bezeichnet z. B. $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit eines Körpers.
Der Betrag einer vektoriellen Größe $\boldsymbol{v}$ wird folgendermaßen gekennzeichnet: $|\boldsymbol{v}| = v$.
Für das Rechnen mit vektoriellen Größen genügen die Gesetze über das Rechnen mit reellen Zahlen nicht. Man muß außer dem Betrag auch Richtung und Durchlaufsinn einer vektoriellen Größe berücksichtigen. Das ist möglich mit Hilfe der Vektorrechnung, die auch für die Lösung rein mathematischer Probleme von großer Bedeutung ist.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wodurch ist eine skalare Größe bestimmt?
2. Wodurch wird eine vektorielle Größe charakterisiert?
3. Warum sind vektorielle Größe und Pfeil nicht identisch?
4. Wie wird der Betrag des Vektors $\boldsymbol{s}$ geschrieben?
5. Wie veranschaulicht man mit Hilfe eines Pfeils den Betrag, die Richtung und die Orientierung einer vektoriellen Größe?

Aufgaben

1. Veranschaulichen Sie zwei Kräfte F_1 und F_2,
   1. die gleich sind,
   2. die gleiche Beträge haben,
   3. die gleiche Richtung und verschiedene Orientierung haben,
   4. die gleichen Betrag und entgegengesetzte Orientierung haben!

2. Wie verhalten sich Betrag, Richtung und Durchlaufsinn der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bei folgenden Bewegungen?
   1. geradlinige gleichförmige Bewegung
   2. freier Fall
   3. gleichförmige Bewegung auf der Kreisbahn

53. Vektoren und Vektorräume

Der zentrale Begriff der Vektorrechnung ist der Begriff des Vektors. Um ihn definieren zu können, definieren wir zuerst den Begriff des Vektorraums.

▶ **Def.:** Eine Menge V mit den Elementen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ heißt ein reeller *Vektorraum*, wenn für die Elemente von V eine Addition definiert ist und wenn zwischen den Elementen von V und den reellen Zahlen eine Multiplikation definiert ist, die folgende Axiome erfüllen:

1. $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ gilt:

A_1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V \rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$

A_2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ — Kommutativaxiom

A_3) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ — Assoziativaxiom

A_4) Zu je zwei Elementen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ gibt es genau ein Element $\boldsymbol{x} \in V$, so daß $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist.
(Die Addition ist eindeutig umkehrbar; zu zwei beliebigen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ gibt es genau ein Differenzelement $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.)

2. $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ und $\forall r_1, r_2 \in R$ gilt:

A_5) $(\boldsymbol{a} \in V$ und $r_1 \in R) \rightarrow r_1\boldsymbol{a} \in V$

A_6) $r_1(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = r_1\boldsymbol{a} + r_1\boldsymbol{b}$ — 1. Distributivaxiom

A_7) $(r_1 + r_2)\boldsymbol{a} = r_1\boldsymbol{a} + r_2\boldsymbol{a}$ — 2. Distributivaxiom

A_8) $r_1(r_2\boldsymbol{a}) = (r_1 r_2)\boldsymbol{a} = r_1 r_2 \boldsymbol{a}$ — Assoziativaxiom

Der Begriff Vektorraum hat ein breites Anwendungsfeld. So lassen sich u. a. in folgenden Mengen eine Addition der Elemente und eine Multiplikation dieser Elemente mit den reellen Zahlen definieren, die die genannten Axiome erfüllen:

in der Menge aller Kräfte, die an einem Punkt angreifen;
in der Menge aller Translationen der Ebene und des dreidimensionalen Raumes;
in der Menge aller geordneten Paare $(x; y)$ mit $x, y \in R$;
in der Menge aller Linearformen $ax + by + cz$ mit $a, b, c \in R$;
in der Menge aller Zahlenfolgen, deren Glieder reelle Zahlen sind.

Diese Mengen haben also die Struktur „Vektorraum" und sind daher „Modelle" für den abstrakten Begriff des Vektorraums. Im nächsten Text werden wir das Modell „Translationen der Ebene" untersuchen.
Nun können wir auch den Begriff des Vektors definieren.

▶ **Def.:** Vektoren sind Elemente einer Menge mit der Struktur Vektorraum.

Diese Definition zeigt, daß für Vektoren die Merkmale Betrag, Richtung und Orientierung nicht notwendig und deshalb auch nicht charakteristisch sind. Trotzdem verwendet man zur Veranschaulichung von Vektoren sehr oft die im Text 52. eingeführten Pfeile; d. h. die „geometrischen Bilder von Vektoren".

Dabei muß man aber immer beachten, daß der Begriff Vektor und seine geometrische Darstellung durch Pfeile nicht identisch sind.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welche Operation ist zwischen den Elementen eines Vektorraums definiert?
2. Was wird zwei beliebigen Elementen aus dem Vektorraum bei der Addition zugeordnet?
3. Welche Axiome muß die Addition in einem Vektorraum erfüllen?
4. Was für eine Operation ist zwischen den Elementen eines Vektorraums und den reellen Zahlen definiert?
5. In welcher Menge liegt $r\boldsymbol{a}$, wenn $r \in R$ und $\boldsymbol{a} \in V$ sind?
6. Welche Axiome muß die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen erfüllen?
7. Warum gibt es bei der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen zwei Axiome der Distributivität, aber nur ein Axiom der Assoziativität?
8. Wie ist ein reeller Vektorraum definiert?
9. Was sind Vektoren?
10. Sind die Merkmale Betrag, Richtung und Durchlaufsinn für den Begriff „Vektor" charakteristisch, oder wofür?
11. Nennen Sie einige Mengen, die die Struktur „Vektorraum" haben!

54. Translation einer Ebene

Wir hatten schon im 53. Text darauf hingewiesen, daß die Menge der Translationen einer Ebene die Struktur „Vektorraum" besitzt, ein „Modell" für Vektorräume ist.
Wir wollen zuerst den Begriff Translation definieren.

► **Def.:** Eine Translation (Verschiebung) $\boldsymbol{t}$ der Ebene ist eine eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich selbst, bei der jedem Punkt P durch eine gerichtete Strecke (Pfeil) $\boldsymbol{t}$ ein Bildpunkt P' zugeordnet wird.

In Abb. 54. 1. sind nur einige von den unendlich vielen Pfeilen gezeichnet, die die Verschiebung $\boldsymbol{t}$ veranschaulichen. Wichtig ist, daß bei der Verschiebung $\boldsymbol{t}$ jedem Punkt P der Ebene genau ein Bildpunkt P' zugeordnet wird, nicht nur diejenigen, bei denen ein Pfeil das angibt. Jeder Pfeil $\boldsymbol{PP'}$ veranschaulicht die Verschiebung $\boldsymbol{t}$ und heißt Repräsentant der Verschiebung. Es gibt unendlich viele Verschiebungen der Ebene, die sich in Betrag, Richtung und Orientierung voneinander unterscheiden können.

Anmerkung: Nur bei Verschiebungen gleicher Richtung ist es sinnvoll, von gleicher oder entgegengesetzter Orientierung zu sprechen.

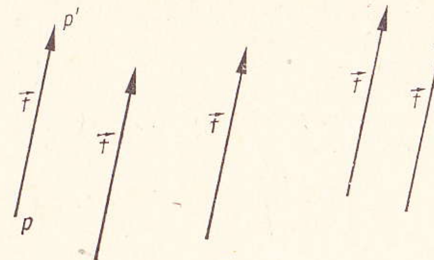


Abb. 54.1.

Für die Gleichheit von Translationen gilt:

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \leftrightarrow |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$
Richtung von $\boldsymbol{a}$ = Richtung von $\boldsymbol{b}$
Orientierung von $\boldsymbol{a}$ = Orientierung von $\boldsymbol{b}$

Wir zeigen nun, daß die Menge der Translationen einer Ebene die Struktur „Vektorraum" besitzt.
A_1) Die Addition von zwei Translationen $\boldsymbol{t}_1$ und $\boldsymbol{t}_2$ definiert man als Nacheinanderausführung dieser beiden Translationen. Die Summe von zwei beliebigen Translationen der Ebene ist immer wieder eine Translation der Ebene.

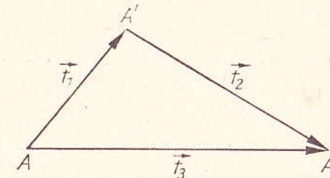


Abb. 54.2. $T_1 + T_2 = T_3$

$\boldsymbol{t}_1$ bildet den Punkt A auf A' ab. Dann wird A' durch $\boldsymbol{t}_2$ auf A'' abgebildet. Man erhält A'' als Bild von A auch durch eine einzige Translation $\boldsymbol{t}_3$.

$\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{t}_3$
$\boldsymbol{AA'} + \boldsymbol{A'A''} = \boldsymbol{AA''}$

Anmerkung: Folgende Überlegung zeigt, daß die Addition unabhängig von den Repräsentanten ist, mit denen man arbeitet. Hätte man $\boldsymbol{t}_1$ durch ein anderes Punktepaar (B; B') repräsentiert und dann $\boldsymbol{t}_2$ ausgeführt, so hätte man für $\boldsymbol{t}_3$ einen anderen Repräsentanten (B; B'') erhalten. $\boldsymbol{AA''}$ und $\boldsymbol{BB''}$ wären aber gleich lang, parallel und gleich orientiert. Sie würden also die gleiche Translation angeben. $\boldsymbol{t}_3$ ist unabhängig von den Repräsentanten, mit denen man arbeitet.

Für die Addition von gegebenen Translationen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt: Man zeichnet den Pfeil $\boldsymbol{a}$.
Man verschiebt den Pfeil $\boldsymbol{b}$ parallel zu sich, bis sein Anfangspunkt im Endpunkt des Pfeiles $\boldsymbol{a}$ liegt.
Man zeichnet die Summentranslation $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, die vom Anfangspunkt der Translation $\boldsymbol{a}$ bis zum Endpunkt der Translation $\boldsymbol{b}$ geht.

Auf die gleiche Weise kann man auch andere Vektoren addieren, die sich geometrisch darstellen lassen.

Beispiel:

Gegeben: Drei an einem Punkt A angreifende Kräfte
Gesucht: Resultierende der drei Kräfte

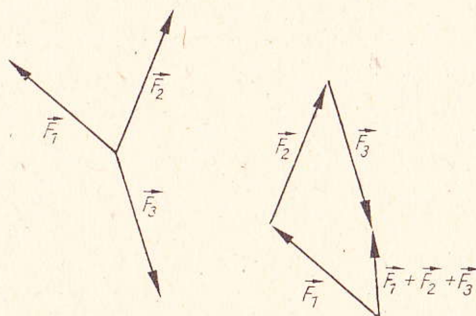


Abb. 54.3.

Die Axiome A_2, A_3, A_4 werden in der Menge der Translationen auch erfüllt. Das erkennt man aus den folgenden Zeichnungen.

A_2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AC}$
$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{AD} + \boldsymbol{DC} = \boldsymbol{AC}$
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

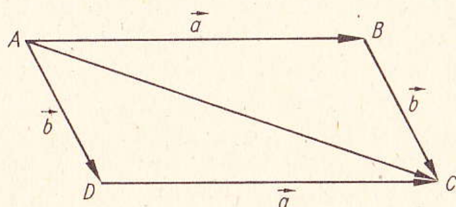


Abb. 54.4. Die Vektoraddition ist kommutativ

A_3) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

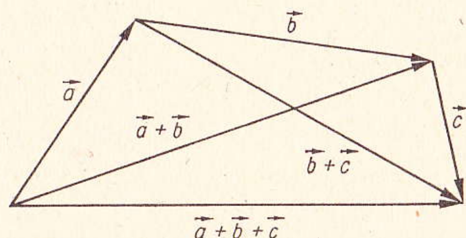


Abb. 54.5. Die Vektoraddition ist assoziativ

A_4) Die Gleichung $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist für alle Translationen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ eindeutig lösbar.
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})$
$-\boldsymbol{a}$ ist die Translation, die den gleichen Betrag und die gleiche Richtung, aber die entgegengesetzte Orientierung wie $\boldsymbol{a}$ hat.
Gegeben: $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$
Gesucht: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}' + (-\boldsymbol{a})$

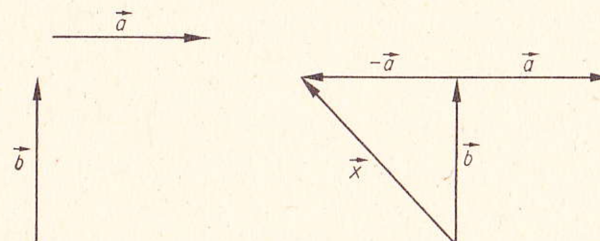


Abb. 54.6.

Da es zu jeder Translation $\boldsymbol{a}$ auch die inverse Translation $-\boldsymbol{a}$ gibt, ist auch die Gleichung $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ immer eindeutig lösbar. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{0}$ heißt die Nulltranslation. $\boldsymbol{0}$ ist eine Translation mit dem Betrag Null.

Wir definieren nun die Multiplikation zwischen Translationen und reellen Zahlen.

A_5) Wenn $\boldsymbol{a}$ eine Translation ist und r eine reelle Zahl ist, so gilt:

$r\boldsymbol{a}$ ist für
- $r > 0$ eine Translation mit gleicher Richtung und gleicher Orientierung wie $\boldsymbol{a}$ und dem r-fachen Betrag
- $r = 0$ die Nulltranslation $\boldsymbol{0}$
- $r < 0$ eine Translation mit gleicher Richtung, entgegengesetzter Orientierung wie $\boldsymbol{a}$ und dem $|r|$-fachen Betrag

Folgerung:

$\boldsymbol{a}$ und $r\boldsymbol{a}$ sind immer kollinear, d. h., sie haben die gleiche Richtung, sie sind parallel.

A_6) $r(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = r\boldsymbol{a} + r\boldsymbol{b}$

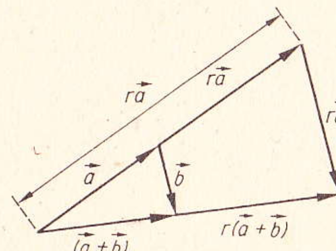


Abb. 54.7.

A_7) $(r_1 + r_2)\boldsymbol{a} = r_1\boldsymbol{a} + r_2\boldsymbol{a}$
A_8) $r_1(r_2\boldsymbol{a}) = (r_1 r_2)\boldsymbol{a} = r_1 r_2 \boldsymbol{a}$

Die Gültigkeit der Axiome A_7 und A_8 ergibt sich aus der Erklärung von $r\boldsymbol{a}$. Somit wurde gezeigt, daß die Menge der Translationen einer *Ebene* die Axiome des Vektorraumes erfüllt. Es könnte ebenso gezeigt werden, daß die Translationen des *Raumes* Vektoren sind. Bei der Untersuchung von anderen Mengen mit der Struktur Vektorraum greift man oft auf das Modell „Translationen" zurück, wenn das möglich ist.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welche Menge ist ein „Modell" für Vektorräume?
2. Wie ist die Translation $\boldsymbol{t}$ einer Ebene definiert?
3. Warum sind Verschiebungen einer Ebene Vektoren?
4. Wieviel Punkte der Ebene werden durch eine Translation $\boldsymbol{t}$ verschoben?
5. Was ist ein bestimmter Pfeil $\boldsymbol{PP'}$ bezüglich einer Translation $\boldsymbol{t}$?
6. Wodurch können sich zwei Translationen unterscheiden?
7. Bei welchen Translationen ist es nur sinnvoll, von gleicher oder entgegengesetzter Orientierung zu sprechen?
8. Wie lautet die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß die Translationen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gleich sind?
9. Wie definiert man die Summe aus zwei Translationen?
10. Ist die Addition von Translationen von den Repräsentanten abhängig?
11. Wie addiert man zwei Translationen $\boldsymbol{t}_1$ und $\boldsymbol{t}_2$?
12. Darf man außer Translationen auch andere Vektoren graphisch addieren?
13. Wie zeigt man graphisch, daß die Axiome A_2, A_3 und A_4 des Vektorraumes bei Translationen erfüllt sind?
14. Welche Eigenschaften hat die zu $\boldsymbol{a}$ inverse Translation $-\boldsymbol{a}$?
15. Wie veranschaulicht man den Vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$?
16. Warum ist die Differenz $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}$ nicht 0, sondern gleich dem Nullvektor $\boldsymbol{0}$?
17. Welche Beziehung besteht zwischen den Translationen $\boldsymbol{a}$ und $r\boldsymbol{a}$?
18. Zeigen Sie, daß die Axiome für die Multiplikation von Translationen mit reellen Zahlen erfüllt sind!

Aufgaben

1. Bestimmen Sie Richtung und Betrag der resultierenden Kraft
$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ mit $F_1 = 70$ N, $F_2 = 60$ N und $\sphericalangle_g(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) = 110°$!

a) Lösen Sie die Aufgabe graphisch!
b) Lösen Sie die Aufgabe trigonometrisch!

2. Bestimmen Sie mit den Werten der Aufgabe 1 die Kraft $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2$!

3. Wie groß sind F_1 und F_2, wenn gilt:
$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}$; $F = 50$ N; $\sphericalangle_g(\boldsymbol{F}_1; \boldsymbol{F}_2) = 100°$; $\sphericalangle_g(\boldsymbol{F}_1; \boldsymbol{F}) = 30°$?

4. Ein Mann schwimmt mit einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_1$ mit $v_1 = 1\ \text{m s}^{-1}$. Er will einen Fluß überqueren, der eine Strömungsgeschwindigkeit von $0{,}8\ \text{m s}^{-1}$ hat. Bestimmen Sie die Größe und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit, wenn er

a) senkrecht zur Stromrichtung
b) unter einem Winkel von 45° mit dem Strom und
c) unter einem Winkel von 60° gegen den Strom schwimmt!

5. Zeigen Sie, daß die Menge
a) aller Wertepaare $(x; y)$,
b) aller Linearformen $ax + by + cz$
einen Vektorraum bildet!

55. Linearkombination von Vektoren

Wir gehen in den folgenden Betrachtungen vom Vektorraum V_E der Translationen einer Ebene bzw. vom Vektorraum V_R der Translationen des Raumes aus. Dabei sprechen wir kurz von Vektoren der Ebene bzw. von Vektoren des Raumes.
Beim Rechnen mit Vektoren spielt der Begriff der Linearkombination von Vektoren eine große Rolle. Bei der Linearkombination von Vektoren werden die beiden Operationen Addition von Vektoren und Multiplikation von Vektoren mit einer reellen Zahl miteinander verbunden.

Der Term $r_1\boldsymbol{a} + r_2\boldsymbol{b} + r_3\boldsymbol{c}$ $(r_i \in R)$ heißt eine Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$.

Die Linearkombination von Vektoren ist wieder ein Vektor.

Beispiel:

Gegeben: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$
Gesucht: $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{l}$

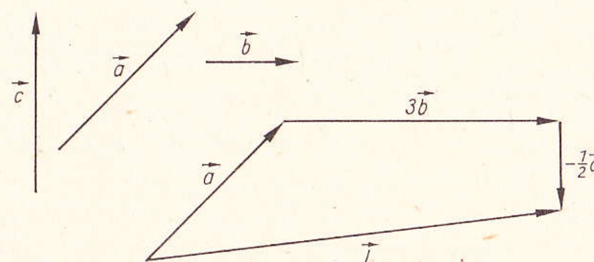


Abb. 55.1.

▶ **Def.:** Jeder Vektor $\boldsymbol{v}$, der sich aus den Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_n$ und den reellen Zahlen $r_1, r_2, \dots r_n$ linear kombinieren läßt, d. h. $\boldsymbol{v} = r_1\boldsymbol{a}_1 + r_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + r_n\boldsymbol{a}_n$, heißt Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_n$.
Die reellen Zahlen $r_1, r_2, \dots r_n$ heißen die Koeffizienten der Linearkombination.

■ *Satz:* In der Ebene läßt sich jeder Vektor $\boldsymbol{v}$ aus zwei beliebigen nicht kollinearen Vektoren $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ linear kombinieren: $\boldsymbol{v} = r_1\boldsymbol{a}_1 + r_2\boldsymbol{a}_2$.
$r_1\boldsymbol{a}_1$ und $r_2\boldsymbol{a}_2$ heißen Komponenten von $\boldsymbol{v}$.

Beispielaufgaben:

Gegeben: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$
Gesucht: $\boldsymbol{c}$ als Linearkombination von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, d. h. $\boldsymbol{c} = r_1\boldsymbol{a} + r_2\boldsymbol{b}$

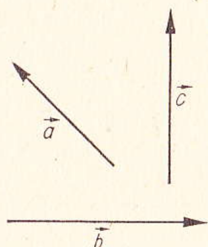


Abb. 55.2.

Lösung:

1. Man wählt für alle Vektoren einen gemeinsamen Anfangspunkt.
2. Man zeichnet durch den Endpunkt von $\boldsymbol{c}$ die Parallele zu einem Vektor. Diese Parallele schneidet den anderen Vektor oder dessen Verlängerung.
3. Der orientierte Streckenzug vom Anfangspunkt von $\boldsymbol{c}$ bis zum Endpunkt von $\boldsymbol{c}$ veranschaulicht die gesuchte Linearkombination.

Zeichnung:

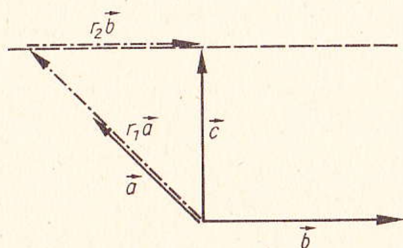


Abb. 55.3.

Aus der Zeichnung lassen sich ablesen: $r_1 = \frac{10}{6}$ $r_2 = \frac{9}{10}$
Die gesuchte Linearkombination ist $\boldsymbol{c} = \frac{10}{6}\boldsymbol{a} + \frac{9}{10}\boldsymbol{b}$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Unter welcher Bedingung ist $\boldsymbol{v}$ eine Linearkombination von $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$?
2. Wie bezeichnet man $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c} - 5\boldsymbol{d}$?
3. Woraus läßt sich jeder Vektor der Ebene linear kombinieren?
4. Wie nennt man $2\boldsymbol{a}$ und $-3\boldsymbol{b}$, wenn $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ gilt?
5. Wie stellt man einen gegebenen Vektor $\boldsymbol{c}$ der Ebene als Linearkombination der gegebenen Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ graphisch dar?

Aufgaben

1. Gegeben sind die Vektoren $\boldsymbol{AB}$; $\boldsymbol{BC}$; $\boldsymbol{CD}$; $\boldsymbol{DA}$; $\boldsymbol{AC}$; $\boldsymbol{DB}$; $\boldsymbol{M_aM_c}$. Stellen Sie folgende Vektoren je fünfmal als Linearkombinationen einiger dieser gegebenen Vektoren dar!

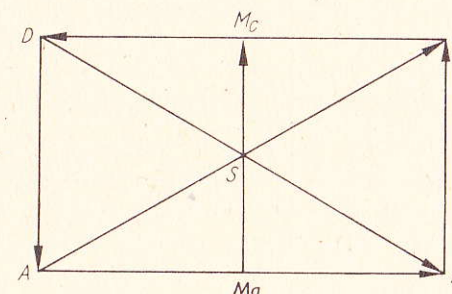


Abb. 55.4.

$\boldsymbol{AS}$

► $\boldsymbol{AS} = \frac{1}{2}\boldsymbol{AC} = \frac{1}{2}\boldsymbol{AB} + \frac{1}{2}\boldsymbol{M_aM_c} = -\boldsymbol{DA} + \frac{1}{2}\boldsymbol{DB}$
$= -\boldsymbol{DA} + \frac{1}{2}\boldsymbol{DC} - \frac{1}{2}\boldsymbol{M_aM_c} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} - \frac{1}{2}\boldsymbol{AC}$

1. $\boldsymbol{M_aS}$
2. $\boldsymbol{BC}$

2. Geben Sie sich drei beliebige nicht kollineare Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ der Ebene vor!

1. Veranschaulichen Sie durch Konstruktion $\boldsymbol{a}$ als Linearkombination von $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$!
2. Veranschaulichen Sie durch Konstruktion $\boldsymbol{b}$ als Linearkombination von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$!

3. Gegeben sind drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ der Ebene mit $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 3$, die die Vektorgleichung $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ erfüllen.

1. Wählen Sie für $\boldsymbol{a}$ eine Richtung und Orientierung, und veranschaulichen Sie $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$!
2. Warum gilt $\sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 120°$?
3. Veranschaulichen Sie durch Konstruktion den Vektor $\boldsymbol{x}$, so daß folgende Vektorgleichungen gelten!

3.1. $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$
3.2. $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$
3.3. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}$

56. Beweise mit Vektoren

Viele Sätze der Geometrie lassen sich mit Hilfe von Vektoren leicht beweisen. Bei Beweisen mit den Mitteln der Vektorrechnung muß man vor allem beachten:

1. Ein Vektor $\boldsymbol{AB}$ ist gleich einer beliebigen Vektorsumme $\boldsymbol{AX_1} + \boldsymbol{X_1X_2} + \ldots + \boldsymbol{X_nB}$, die durch einen von A nach B gehenden orientierten Streckenzug $AX_1X_2 \ldots X_nB$ veranschaulicht wird.

Beispiel:

$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AX_1} + \boldsymbol{X_1X_2} + \boldsymbol{X_2B}$

2. Umformungen von Vektorgleichungen sind möglich, wobei die Rechengesetze der Addition von Vektoren und der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen angewandt werden.

Folgender Satz soll nun bewiesen werden:

■ Wenn man in einem Dreieck die Mittelpunkte von zwei Seiten verbindet, so ist die Verbindungsstrecke parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

Skizze:

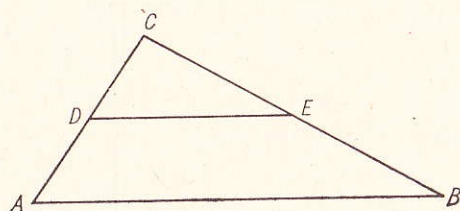


Abb. 56.1.

Voraussetzung: $\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{DC} = \frac{1}{2}\boldsymbol{AC} \quad \boldsymbol{CE} = \boldsymbol{EB} = \frac{1}{2}\boldsymbol{CB}$

Behauptung: $\boldsymbol{DE} = \frac{1}{2}\boldsymbol{AB}$

Beweis: $\boldsymbol{DE} = \boldsymbol{DC} + \boldsymbol{CE} = \frac{1}{2}\boldsymbol{AC} + \frac{1}{2}\boldsymbol{CB} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{CB}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{AB}$

w. z. b. w.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Welche zwei Veranschaulichungen gibt es für die Vektorsumme $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} + \boldsymbol{CD} + \boldsymbol{DE}$?
2. Sind die Vektoren $\boldsymbol{AX_1} + \boldsymbol{X_1X_2} + \boldsymbol{X_2X_3} + \boldsymbol{X_3B}$ und $\boldsymbol{AY} + \boldsymbol{YB}$ und $\boldsymbol{AB}$ gleich? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Unter welcher Bedingung gilt $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$?

4. Darf man bei Gleichungen mit Vektoren
   1. auf beiden Seiten den gleichen Vektor addieren,
   2. beide Seiten mit der gleichen reellen Zahl multiplizieren,
   3. auf beiden Seiten die gleiche reelle Zahl addieren,
   4. auf beiden Seiten den gleichen Vektor subtrahieren,
   5. beide Seiten durch die gleiche reelle Zahl $\neq 0$ dividieren,
   6. beide Seiten durch den gleichen Vektor $\neq 0$ dividieren?
5. Wie führt man im allgemeinen den direkten Beweis einer Implikation?

Aufgaben

Beweisen Sie folgende Sätze vektoriell!

1. Wenn man in einem beliebigen Viereck die Mittelpunkte benachbarter Seiten verbindet, entsteht ein Parallelogramm.

2. Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn die Diagonalen des Vierecks einander halbieren.
Anleitung: Schreiben Sie beim Beweis, daß die Diagonalen einander halbieren, die Behauptung in der Form: $\boldsymbol{AB} = \frac{1}{2}\boldsymbol{AC} + \frac{1}{2}\boldsymbol{DB}$.

3. Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks teilen einander im Verhältnis 1 : 2.
Anleitung: Schreiben Sie die Behauptung z. B. in der Form:
$\boldsymbol{AB} = \frac{2}{3}\boldsymbol{AM_a} + \frac{2}{3}\boldsymbol{M_bB}$.

4. Wenn man in einem Parallelogramm den Mittelpunkt einer Seite mit einer Gegenecke verbindet und die Diagonale zeichnet, die nicht durch diese Ecke geht, so teilen die beiden Strecken einander im Verhältnis 1 : 2.

57. Skalarprodukt

Außer der Vektoraddition und der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar gibt es noch andere Verknüpfungen von Vektoren, die von bestimmten physikalischen Aufgabenstellungen abgeleitet wurden, z. B. von der Verschiebungsarbeit einer Kraft längs eines Weges.

57.1. Verschiebungsarbeit einer Kraft als Skalarprodukt

Wir betrachten die Verschiebungsarbeit W, die verrichtet wird, wenn ein Körper längs eines geradlinigen Weges $\boldsymbol{s}$ durch eine Kraft $\boldsymbol{F}$ verschoben wird. Dabei setzen wir voraus, daß die Kraft $\boldsymbol{F}$ konstant ist. Wenn $\boldsymbol{F}$ nicht konstant, sondern eine Funktion des Weges $\boldsymbol{s}$ ist, braucht man zur Berechnung der Arbeit W außer der Vektorrechnung noch die Integralrechnung.

Bei konstanter Kraft unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{s}$ haben die gleiche Richtung und die gleiche Orientierung
2. Fall: $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{s}$ haben verschiedene Richtungen

Zu 1.:
Für $\boldsymbol{F} \uparrow\uparrow \boldsymbol{s}$ gilt – wie aus der Physik bekannt ist, für die Verschiebungsarbeit die einfache Formel $W = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{s}| = F \cdot s$. Wenn man beispielsweise einen Körper von 50 N Gewicht 2 m senkrecht nach oben hebt, so verrichtet man eine Hubarbeit von 100 Nm. Aber nur im Sonderfall $\boldsymbol{F} \uparrow\uparrow \boldsymbol{s}$ gilt $W = F \cdot s$.
Zu 2.:
Für $\boldsymbol{F} \uparrow\uparrow \boldsymbol{s}$ gilt $W = F_s \cdot s$, wobei F_s der Betrag der Komponente von $\boldsymbol{F}$ in Richtung des Weges ist.
Wir wollen das an einem Beispiel erläutern.
Wenn man mit der Kraft $\boldsymbol{F}$ einen Wagen auf einer ebenen Straße zieht, so haben der Weg $\boldsymbol{s}$ des Wagens und die Kraft $\boldsymbol{F}$ verschiedene Richtungen.

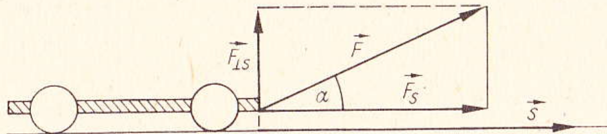


Abb. 57.1. Zerlegung einer Kraft $\boldsymbol{F}$ im Komponenten bezüglich des Weges $\boldsymbol{s}$

Die Verschiebung des Wagens wird nur durch die Komponente der Kraft $\boldsymbol{F}$ in Richtung des Weges $\boldsymbol{s}$ bewirkt. Diese Komponente bezeichnet man mit $\boldsymbol{F}_s$. Man sagt auch: $\boldsymbol{F}_s$ ist die Parallelkomponente von $\boldsymbol{F}$ bezüglich des Weges $\boldsymbol{s}$. Dagegen leistet die Orthogonalkomponente $\boldsymbol{F}_{\perp s}$ der Kraft $\boldsymbol{F}$ bezüglich des Weges $\boldsymbol{s}$ keinen Beitrag zur Verschiebungsarbeit W.

Es gilt also: $W = |\boldsymbol{F}_s| \cdot |\boldsymbol{s}| = F_s \cdot s$. Dabei ist $F_s = F \cos \alpha$ mit $\alpha = \sphericalangle_g(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s})$.

Also gilt:

$$W = F \cdot s \cdot \cos \sphericalangle_g(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s}) = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cdot \cos \sphericalangle_g(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s})$$

Sie können sich sofort überlegen, daß der 1. Fall im 2. Fall als Sonderfall enthalten ist.
Die Verschiebungsarbeit ist eine Funktion der beiden Vektoren $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{s}$. Trotzdem ist W keine vektorielle, sondern eine skalare Größe. Man nennt die Verschiebungsarbeit W das **skalare** Produkt oder das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{s}$ und schreibt $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cos \sphericalangle_g(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s})$.
Bei der Verschiebungsarbeit verknüpft man also einen Vektor $\boldsymbol{s}$ aus dem Vektorraum V_s aller geradlinigen Wege (Verschiebungen) mit einem Vektor $\boldsymbol{F}$ aus dem Vektorraum V_F aller Kräfte. Das Produkt $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$ ist aber kein Vektor, sondern eine reelle Zahl, ein Skalar.

57.2. Definition des Skalarprodukts

Produktbildungen der Form $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ treten nicht nur bei der Berechnung der Verschiebungsarbeit auf, so daß folgende allgemeine **Definition des Skalarprodukts** für Vektoren, die graphisch darstellbar sind, zweckmäßig ist:

▶ **Def.:** Das Skalarprodukt aus zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist die reelle Zahl
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad (\sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leqq 180°)$.

Diese Verknüpfung der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ nennt man **skalare** Multiplikation, weil $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ein Skalar ist, nämlich das Produkt aus den Beträgen der Vektoren und dem Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren.
Man liest $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ als „$\boldsymbol{a}$ Punkt $\boldsymbol{b}$", „$\boldsymbol{a}$ skalar multipliziert mit $\boldsymbol{b}$" oder „$\boldsymbol{a}$ mal $\boldsymbol{b}$".

57.3. Folgerungen aus dem Skalarprodukt

■ 1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ oder $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ oder $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.
Zum Beispiel bewirkt $\boldsymbol{F}$ keine Verschiebung in Richtung von $\boldsymbol{s}$ und verrichtet somit auch keine Verschiebungsarbeit, wenn $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{s}$ aufeinander senkrecht stehen.

2. Aus $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ folgt nicht $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \cdot b \cdot \cos \beta = S$
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = a \cdot c \cdot \cos \gamma = S$

Aus $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ folgt, daß $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ die gleiche Komponente in Richtung von $\boldsymbol{a}$ haben.
$\boldsymbol{b}_a = \boldsymbol{c}_a$.

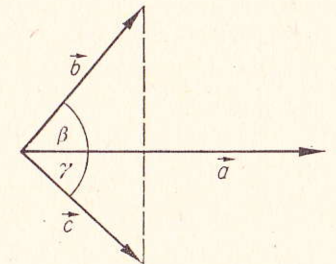


Abb. 57.2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

3. Es gibt keine Umkehrung zur skalaren Multiplikation, denn die Gleichung $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda$ ist bei vorgegebenem Wert des Skalarprodukts und bekannten Vektor $\boldsymbol{a}$ nicht eindeutig lösbar. Es gibt unendlich viele Vektoren $\boldsymbol{x}$, so daß $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda$ ist.

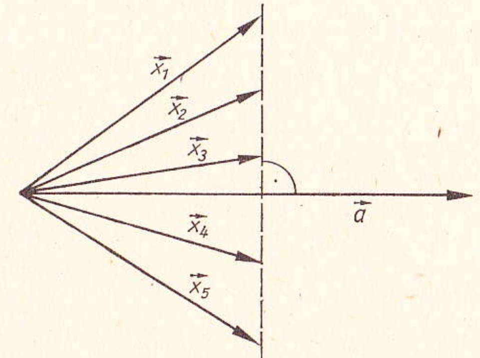


Abb. 57.3.

4. Die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren: Aus der Definition des skalaren Produkts erhält man sofort durch Umformung eine Formel für die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

$$\cos \sphericalangle_g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a \cdot b} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0})$$

Durch diese Gleichung ist der Winkel im Intervall $[0; \pi]$ eindeutig bestimmt. Wir werden diese Formel in späteren Kapiteln anwenden.

57.4. Eigenschaften der skalaren Multiplikation

1. Die skalare Multiplikation ist **nicht assoziativ**.

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Denn im allgemeinen ist $n \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot m$ mit $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = n$ und $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = m$.

2. Die skalare Multiplikation ist **kommutativ**.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \sphericalangle_g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = b \cdot a \cdot \cos \sphericalangle_g(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

Denn $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$.

3. Für die Verbindung der Addition von Vektoren und der skalaren Multiplikation gilt das **distributive Gesetz**.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

Zur Veranschaulichung dieses Gesetzes beschränken wir uns auf den Sonderfall, daß $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ in einer Ebene liegen.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_a + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_a \\ &= a \cdot b_a + a \cdot c_a = a \cdot (b_a + c_a) \\ &= a \cdot |(\mathbf{b} + \mathbf{c})_a| = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})_a \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \end{aligned}$$

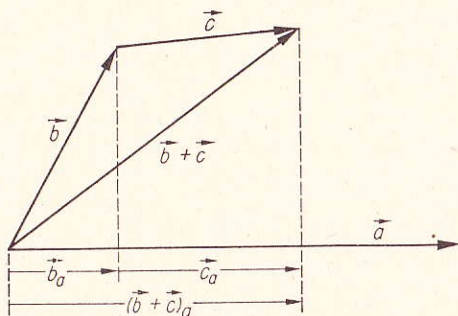


Abb. 57.4. Addition von Vektoren und skalare Multiplikation sind distributiv

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie ist das skalare Produkt von zwei Vektoren definiert?
2. Welchen Wert hat $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$?
3. Warum heißt die Multiplikation $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ eine **skalare** Multiplikation?
4. Unter welchen Bedingungen ist das skalare Produkt aus $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ gleich Null?
5. Was folgt aus $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{p}$?
6. Ist der Quotient $\frac{\mathbf{a}}{5}$ definiert? Warum?
7. Warum gibt es keine Umkehrung der skalaren Multiplikation?
8. Wie kann man die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{s}$ bestimmen?
9. Welche Rechengesetze gelten bei der skalaren Multiplikation?
10. Welche Rechengesetze gelten bei der skalaren Multiplikation nicht?
11. Welches Gesetz verbindet Vektoraddition und skalare Multiplikation?
12. An welche physikalische Aufgabe kann man bei einer skalaren Multiplikation denken?

Aufgaben

1. Bilden Sie aus den beiden Aussageformen eine wahre Äquivalenz oder – wenn das nicht möglich ist – eine wahre Implikation!

1. A: $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ oder $\mathbf{b} = \mathbf{o}$
   B: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
2. A: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab$
   B: $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ haben gleiche Richtung.
3. A: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab$
   B: $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ haben gleiche Richtung und sind gleich orientiert.
4. A: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
   B: $\mathbf{b} = \mathbf{c}$

2. Antworten Sie auf folgende Fragen!

1. Unter welchen Voraussetzungen gilt für die Berechnung der mechanischen Arbeit die Gleichung $W = F \cdot s$?
2. Welchen Wert hat F_s, wenn $\mathbf{F}$ und $\mathbf{s}$ die gleiche Richtung haben?
3. Welchen Wert hat F_s, wenn $\mathbf{F}$ orthogonal zu $\mathbf{s}$ ist?
4. Welche Beziehung besteht zwischen F_s und F, wenn $\sphericalangle_g(\mathbf{F}, \mathbf{s}) = \pi$ ist?
5. Unter welcher Bedingung für $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ verschwindet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$?
6. Unter welcher Bedingung für $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ ist die Gleichung $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ erfüllt?
7. Was besagt die Gleichung $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_a$?
8. Warum gelten für beliebige Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ stets folgende Ungleichungen?

a) $-|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \leqq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leqq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leqq a^2 \cdot b^2$

Unter welchen Bedingungen gilt in diesen Beziehungen das Gleichheitszeichen?

3. Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$!

1. $a = 3 \; b = 4 \; \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 60°$ 3. $a = 3 \; b = 5 \; \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 90°$
2. $a = 4 \; b = 5 \; \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 120°$ 4. $a = 5 \; b = 6 \; \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 180°$

4. Welche Arbeit wird verrichtet, wenn ein Körper längs des Weges $\boldsymbol{s}$ durch eine Kraft $\boldsymbol{F}$ verschoben wird?

1. $s = 3\,\text{m} \; F = 2\,\text{N} \; \sphericalangle_g(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s}) = 0°$ 3. $s = 3\,\text{m} \; F = 4\,\text{N} \; \sphericalangle_g(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s}) = 45°$
2. $s = 2\,\text{m} \; F = 3\,\text{N} \; \sphericalangle_g(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s}) = 30°$

5. Wenn in geometrischen Lehrsätzen rechte Winkel vorkommen, so benutzt man oft zur Beweisführung das skalare Produkt; denn für $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ gilt: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Beispiel:

■ In jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten.

Voraussetzung: $c^2 = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} = c \cdot c \cdot \cos 0° = c^2$
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0; \; \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$
Behauptung: $c^2 = a^2 + b^2$
Beweis: $c^2 = \boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$
$= \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 = a^2 + b^2$ w. z. b. w.

Beweisen Sie!

1. Im Parallelogramm ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Seiten.
2. Die Diagonalen im Rhombus stehen aufeinander senkrecht.

58. Vektorprodukt

58.1. Drehmoment einer Kraft als Vektorprodukt

Aus der Physik ergibt sich neben dem Skalarprodukt noch eine zweite Art der Multiplikation von Vektoren.

Wir betrachten einen starren Körper, der sich um einen festen Punkt D drehen kann. Eine Kraft $\boldsymbol{F}$ greife an einem Punkt P mit $P \neq D$ an. Durch die Kraft $\boldsymbol{F}$ entsteht ein Drehmoment am starren Körper.

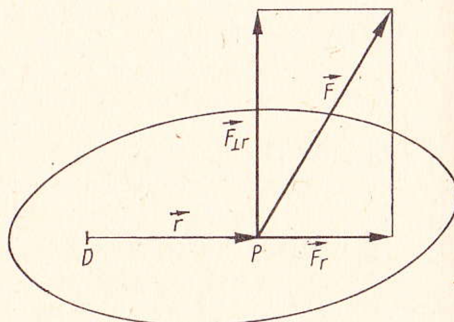


Abb. 58.1. Zerlegung einer Kraft $\boldsymbol{F}$ in Komponenten bezüglich $\boldsymbol{r}$

Ein Drehmoment mit einem bestimmten Betrag bewirkt eine Drehung um eine feste Drehachse mit einem bestimmten Drehsinn.
Betrag, Richtung der Drehachse und Drehsinn kann man durch einen Vektor $\boldsymbol{M}$ erfassen. Deshalb beschreibt man das Drehmoment durch einen Vektor.

Betrag von $\boldsymbol{M}$:

Der Vektor $\boldsymbol{r}$ gibt die Lage des Angriffspunktes P der Kraft $\boldsymbol{F}$ bezüglich des Drehpunktes D an. Von $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{r}$ wird eine Ebene ε aufgespannt.
Die Kraft $\boldsymbol{F}$ hat in ε eine Parallelkomponente $\boldsymbol{F}_r$ und eine Normalkomponente $\boldsymbol{F}_r$ bezüglich $\boldsymbol{r}$. Die Komponente $\boldsymbol{F}_r$ bewirkt keine Drehung. $\boldsymbol{F}_r$ würde eine Translation des starren Körpers in Richtung $\boldsymbol{r}$ bewirken. Da aber der Punkt D fest ist, entsteht keine Translation. Die Normalkomponente $\boldsymbol{F}_{\perp r}$ bewirkt das Drehmoment $\boldsymbol{M}$ des starren Körpers.

Es gilt: $|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{r}| \cdot |\boldsymbol{F}_{\perp r}|$
da $|\boldsymbol{F}_{\perp r}| = |\boldsymbol{F}| \cdot \sin \alpha$ ist, folgt:
$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$ mit $\alpha = \sphericalangle_g(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{F})$;
$0 \leqq \alpha \leqq 180°$

Richtung von $\boldsymbol{M}$:

Alle Punkte des starren Körpers bewegen sich bei der Drehung um D auf Kreisen parallel zur Ebene ε. Die Drehachse dieser Drehung steht senkrecht auf der Ebene ε und geht durch D.
Die Richtung der Drehachse bezeichnet man als Richtung des Drehmoments. Das Drehmoment $\boldsymbol{M}$ steht also senkrecht auf ε, d. h., $\boldsymbol{M}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{F}$.

Orientierung von $\boldsymbol{M}$:

Man orientiert das Drehmoment dadurch, daß man festlegt: $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{M}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Anwendung der Rechte-Hand-Regel).

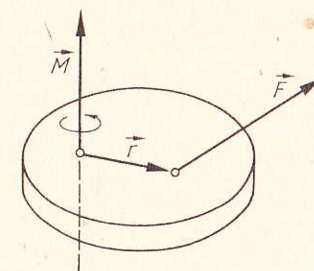


Abb. 58.2. $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$ bilden ein Rechtssystem

Zusammenfassung:

Das Drehmoment $\boldsymbol{M}$ ist ein Vektor mit den Eigenschaften:

1. $|\boldsymbol{M}| = r \cdot F \cdot \sin \sphericalangle_g(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{F}) \quad 0° \leqq \sphericalangle_g(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{F}) \leqq 180°$
2. $\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{F}$ ($\boldsymbol{M}$ steht senkrecht auf der von $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{F}$ aufgespannten Ebene.)
3. Die Vektoren $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{M}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

58.2. Definition des Vektorprodukts

Da es außer dem Drehmoment noch andere vektorielle Größen gibt, die durch vektorielle Verknüpfung von zwei Vektoren des Raumes dargestellt werden können, ist folgende allgemeine Definition des Vektorprodukts zweckmäßig.

▶ **Def.:** Das Vektorprodukt aus den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist der Vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, der folgende Bedingungen erfüllt:

1. $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \quad 0 \leqq \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \leqq \pi$
2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}$ und $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$
3. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Anmerkung: Der Betrag $a \cdot b \cdot \sin \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ des Vektorprodukts $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ist gleich dem Zahlenwert des Flächeninhalts des von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

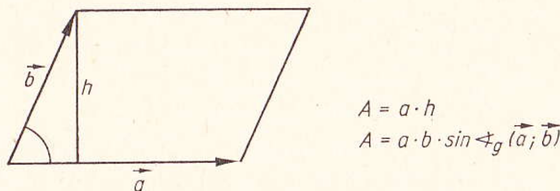


Abb. 58.3. Graphische Darstellung von $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

58.3. Folgerungen aus dem Vektorprodukt

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ oder $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ oder $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$

Zum Beispiel bewirkt $\boldsymbol{F}$ an einem starren Körper keine Drehung, wenn $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{F}$ kollinear sind.

2. $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \leqq a \cdot b$,
denn für $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ ist $0 \leqq \sin \alpha \leqq 1$.

3. Aus $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ folgt nicht $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.
Aus $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ folgen:
a) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ liegen in einer Ebene und

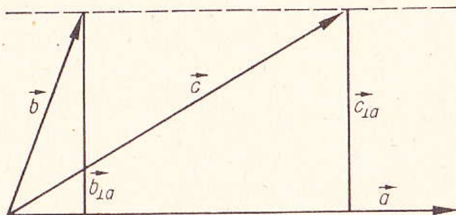


Abb. 58.4.

b) $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ haben die gleiche Normalkomponente bezüglich $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{b}_{\perp a} = \boldsymbol{c}_{\perp a}$).

4. Es gibt keine Umkehrung zur vektoriellen Multiplikation, denn die Gleichung $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist bei gegebenen Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ nicht eindeutig lösbar.

Die Gleichung $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist nach Definition des Vektorprodukts nicht lösbar, wenn $\boldsymbol{a} \not\perp \boldsymbol{b}$ gilt. Wenn aber $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ ist, und wenn es eine Lösung $\boldsymbol{x}_1$ mit $\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{b}$ gibt, so gibt es auch unendlich viele weitere Lösungen.

Auch jeder Vektor $\boldsymbol{x}_k$, der mit $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{a}$ in der gleichen Ebene liegt und die gleiche Normalkomponente bezüglich $\boldsymbol{a}$ wie $\boldsymbol{x}_1$ besitzt, wäre eine Lösung. In diesem Fall hätte die Gleichung unendlich viele Lösungen.

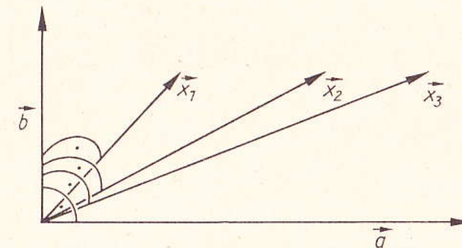


Abb. 58.5.

58.4. Eigenschaften der vektoriellen Multiplikation

1. Die vektorielle Multiplikation ist *nicht assoziativ.*

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

Für alle nicht komplanaren Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ z. B. sind die beiden Ergebnisvektoren verschieden, denn $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf $\boldsymbol{c}$ steht und in der $\boldsymbol{a}$-$\boldsymbol{b}$-Ebene liegt. Dagegen ist $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ ein Vektor, der senkrecht auf $\boldsymbol{a}$ steht und in der $\boldsymbol{b}$-$\boldsymbol{c}$-Ebene liegt.

2. Die vektorielle Multiplikation ist *nicht kommutativ.*

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

Vertauscht man in einem Vektorprodukt die Faktoren, so erhält man einen Vektor vom gleichen Betrag und gleicher Richtung, aber entgegengesetzter Orientierung: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$.

3. Für die Verbindung der Addition von Vektoren und der vektoriellen Multiplikation gilt das *distributive Gesetz:*

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

Zur Veranschaulichung dieses Gesetzes beschränken wir uns auf den Sonderfall, daß $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ in einer Ebene liegen.

Gegeben: a, b, c

Wir zeichnen die durch die Vektoren a und b, a und c, a und $b + c$ aufgespannten Parallelogramme.

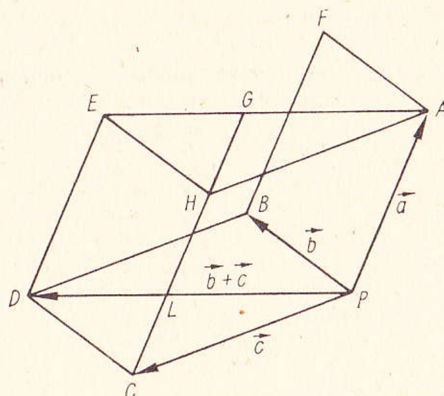


Abb. 58.6. Addition von Vektoren und vektorielle Multiplikation sind distributiv

a) Die Vektoren $a \times b$, $a \times c$ und $a \times (b + c)$ sind kollinear; denn sie stehen alle senkrecht auf der Ebene, in der a, b und c liegen.
b) Sie sind aus der Zeichentafel heraus orientiert.
c) Für ihre Beträge gilt

$$|a \times b| + |a \times c| = |a \times (b + c)|$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |a \times b| &= A_{PAFB} \\ &= A_{DCHE} \\ &= A_{DLGE} \\ |a \times c| &= A_{PAHC} \\ &= A_{PAGL} \end{aligned}$$

(Die Parallelogramme stimmen in der Seitenlänge a und in der Länge der zugehörigen Höhe überein.)

$$\begin{aligned} |a \times b| + |a \times c| &= A_{DLGE} + A_{PAGL} \\ &= A_{PAED} = |a \times (b + c)| \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie definiert man das Drehmoment einer Kraft als vektorielle Größe?
2. Wie ist das Vektorprodukt $m \times n$ der Vektoren m und n definiert?
3. Warum nennt man $m \times n$ ein *Vektor*produkt?
4. Unter welchen Bedingungen ist $m \times n = o$?
5. Welche geometrische Interpretation ist für $|m \times n|$ möglich?
6. Welche Beziehung besteht zwischen $|m| \cdot |n|$ und $|m \times n|$?
7. Was folgt aus $m \times p = n \times p$?
8. Warum gibt es keine Umkehrung der vektoriellen Multiplikation?
9. Welche Rechengesetze gelten für die vektorielle Multiplikation nicht?
10. Welche Rechengesetze gelten für die vektorielle Multiplikation?
11. An welche physikalische Aufgabe kann man bei der vektoriellen Multiplikation denken?

Aufgaben

1. Bilden Sie Satzgefüge, indem Sie bei den folgenden Beispielen den 2. Satz als Attributsatz dem 1. Satz unterordnen.

Die Arbeit wird von der Kraft F verrichtet. Die Kraft F wirkt längs des Weges s.

► Die Arbeit wird von der Kraft F, die längs des Weges s wirkt, verrichtet.

1. Die Arbeit W ist eine Verknüpfung zweier vektorieller Größen. Die Arbeit W wird von einer längs des Weges s wirkenden Kraft F verrichtet.
2. Das Drehmoment M ist ein Vektor vom Betrag M. Das Drehmoment M ist orthogonal zu den Vektoren F und s.
3. Man berechnet den Betrag des Drehmoments einer Kraft F mit Hilfe des Ausdrucks $M = r \cdot F \cdot \sin \sphericalangle_g(r; F)$. Die Kraft F bewirkt eine Drehung um das Drehzentrum Z.
4. An einem starren Körper greife die Kraft F an. Der Körper sei im Punkt Z drehbar gelagert.
5. Es seien drei Vektoren gegeben. Die Vektoren liegen in einer Ebene.
6. Der Betrag des Vektorprodukts $a \times b$ ist der Zahlenwert des Flächeninhalts eines Parallelogramms. Das Parallelogramm wird von a und b aufgespannt.
7. $F_{\perp s}$ ist eine Komponente der Kraft F. Die Komponente ist orthogonal zum Vektor s.
8. Durch $W = F \cdot s$ ist eine Verknüpfung zweier Vektoren definiert. Das Ergebnis der Verknüpfung ist ein Skalar.
9. Durch $M = s \times F$ ist ein Produkt zweier Vektoren definiert. Das Ergebnis des Produkts ist ein Vektor.
10. In der Physik treten Verknüpfungen von Vektoren auf. Die Ergebnisse der Verknüpfungen sind Skalare oder Vektoren.

2. Antworten Sie auf folgende Fragen!

1. Welche Kraftkomponente verwendet man bei der Berechnung der Verschiebungsarbeit?
2. Welche Kraftkomponente verwendet man bei der Berechnung des Drehmoments?
3. Welche Unterschiede und welche Gemeinsamkeiten gibt es bei der Berechnung einer Verschiebungsarbeit und eines Drehmoments?

3. Warum gilt $a \times b = -(b \times a)$?

4. Sind folgende Ausdrücke definiert? Stellen die definierten Ausdrücke einen Vektor oder einen Skalar dar?

1. $(a \times b) \cdot (c \times d)$
2. $(a \cdot b) \times (c \cdot d)$
3. $(a \times b) \times (c \times d)$
4. $(a \times b) \cdot (c \cdot d)$
5. $(a \cdot b) \times c$
6. $(a \times b) \cdot c$
7. $a \cdot (b \times c)$

5. Wie groß ist $|a \times b|$, wenn gilt:

1. $a = 3 \quad b = 4 \quad \sphericalangle_g(a; b) = 30°$
2. $a = 4 \quad b = 4 \quad \sphericalangle_g(a; b) = 150°$
3. $a = 5 \quad b = 6 \quad \sphericalangle_g(a; b) = 90°$
4. $a = 4 \quad b = 6 \quad \sphericalangle_g(a; b) = 180°$

59. Vektoren in Koordinatendarstellung

Wir wollen Punkte der Ebene oder des dreidimensionalen Raumes mit Hilfe von Vektoren angeben, um geometrische Untersuchungen mit der Vektorrechnung rechnerisch durchführen zu können. Dabei gehen wir davon aus, daß ein ebenes bzw. räumliches Koordinatensystem jedem Punkt eineindeutig ein Zahlenpaar bzw. Zahlentripel zuordnet.

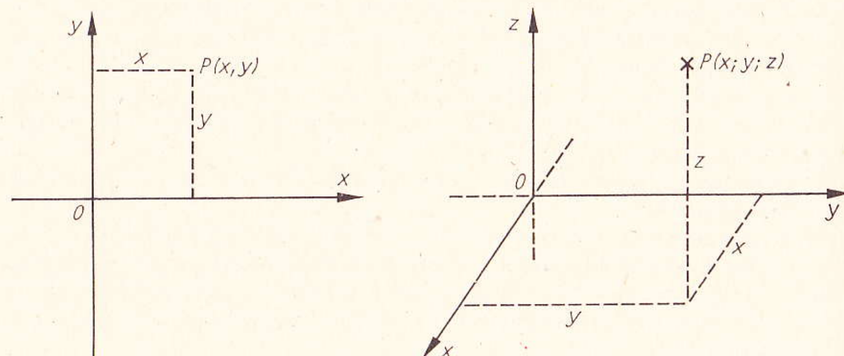


Abb. 59.1. Orthogonales ebenes x-y- und räumliches x-y-z-Koordinatensystem

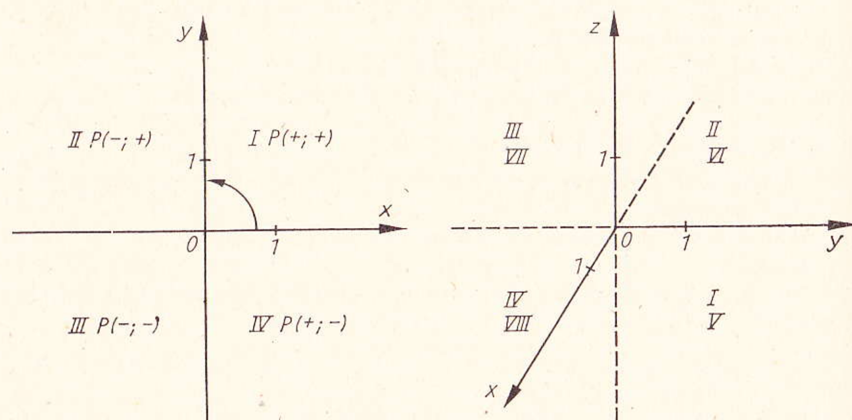


Abb. 59.2.

4 Quadranten im positiven Drehsinn
Der Punkt $P_1(-3; 4)$ liegt im 2. Quadranten und hat die Koordinaten $x = -3$ und $y = 4$.

8 Oktanten: Rechtssystem

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Der Punkt $P(3; -1; 2)$ liegt im 4. Oktanten und hat die Koordinaten $x = 3$, $y = -1$ und $z = 2$.

Man verwendet im allgemeinen orthogonale Koordinatensysteme, wobei die x-, y- und z-Achse in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Dabei beträgt der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der positiven y-Achse 90°, nicht 270°. Die Koordinaten x, y und z eines Punktes können als Zahlenwerte von Streckenlängen aufgefaßt werden. Durch die Koordinatenachsen eines orthogonalen Koordinatensystems wird die Ebene in 4 Quadranten bzw. der Raum in 8 Oktanten eingeteilt.
Mit einem Koordinatensystem erhält man eine eineindeutige Zuordnung zwischen Punkten und ihren Koordinaten.

■ Jedem Punkt $P(x; y)$ der Ebene und jedem Punkt $P(x; y; z)$ des Raumes kann auch eineindeutig ein Vektor $\boldsymbol{OP}$ zugeordnet werden.

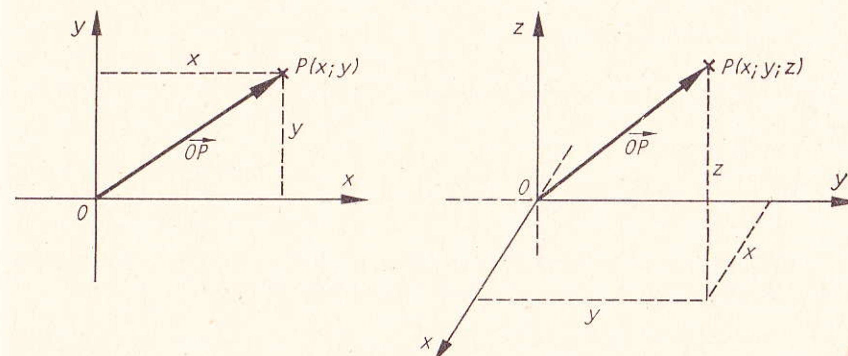


Abb. 59.3. $P(x; y) \leftrightarrow \boldsymbol{OP}$ und $P(x; y; z) \leftrightarrow \boldsymbol{OP}$

■ Der Vektor $\boldsymbol{OP}$ heißt Ortsvektor des Punktes P bezüglich des Ursprungs 0 des Koordinatensystems.

Um den Ortsvektor beschreiben zu können, wählt man auf den Koordinatenachsen Einheitsvektoren. Einheitsvektoren sind Vektoren, die den Betrag 1 haben.

$\boldsymbol{i}$ ist der Einheitsvektor, der die gleiche Richtung und Orientierung wie die x-Achse hat.
$\boldsymbol{j}$ ist der Einheitsvektor, der die gleiche Richtung und Orientierung wie die y-Achse hat.
$\boldsymbol{k}$ ist der Einheitsvektor, der die gleiche Richtung und Orientierung wie die z-Achse hat.

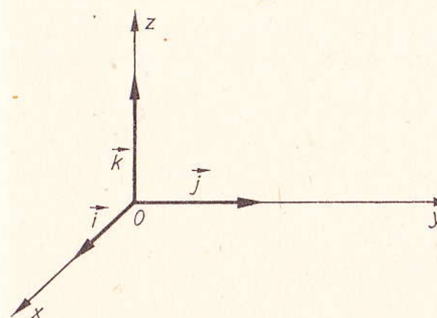


Abb. 59.4. Koordinatensystem $[0; \boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}]$

Nun kann man jeden Vektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP}$ als Linearkombination aus den Vektoren $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{k}$ darstellen, indem man die Vektoren $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{k}$ mit den Koordinaten x, y und z des Punktes P multipliziert und die Ergebnisvektoren addiert.

Diese Darstellung ist eindeutig.

Weil jeder Ortsvektor aus den Vektoren $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ eindeutig linear kombinierbar ist, sagt man auch: Die Vektoren $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ bilden eine Basis für die Darstellung der Vektoren.

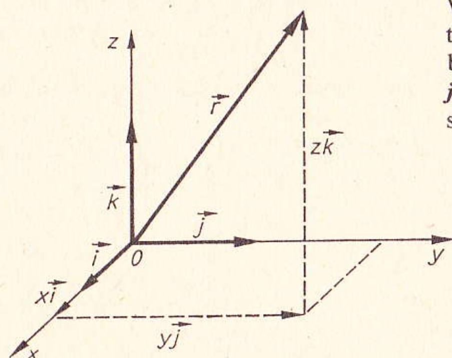


Abb. 59.5. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ bilden ein orthonormiertes Rechtssystem. Orthonormiert setzt sich aus **orthogonal** und **normiert** zusammen. $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sind paarweise orthogonal:

$$\sphericalangle_g(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) = \sphericalangle_g(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}) = \sphericalangle_g(\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) = 90°.$$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sind normiert, d. h., ihre Beträge sind gleich 1:

$$|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1.$$

Das Koordinatensystem mit dem Ursprung 0 und mit der Basis $(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k})$ bezeichnet man mit $\{0; \boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}\}$.

Der Ortsvektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ hat drei Komponenten $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ und $z\boldsymbol{k}$. $x\boldsymbol{i}$ ist die Komponente von $\boldsymbol{r}$ bezüglich des Basisvektors $\boldsymbol{i}$. $y\boldsymbol{j}$ ist die Komponente von $\boldsymbol{r}$ bezüglich des Basisvektors $\boldsymbol{j}$. $z\boldsymbol{k}$ ist die Komponente von $\boldsymbol{r}$ bezüglich des Basisvektors $\boldsymbol{k}$. Die reellen Zahlen x, y, z bezeichnet man als die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{r}$ bezüglich der Basis $(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k})$. x ist die Koordinate von $\boldsymbol{r}$ bezüglich des Basisvektors $\boldsymbol{i}$. Kurz: x ist die x-Koordinate von $\boldsymbol{r}$.

Nun führt man noch eine Verkürzung ein. Man schreibt für die Linearkombination $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ nur noch die Koordinaten von $\boldsymbol{r}$ in Form eines Spaltenvektors oder eines Zeilenvektors:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z).$$

Zum Beispiel: $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (3, 4, -2)$

$\boldsymbol{a} = (-2, -5, 7)$ bedeutet $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$.

Durch diese Festlegung wird jedem Punkt $P(x; y; z)$ eineindeutig ein Ortsvektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x; y; z)$ zugeordnet. In den folgenden Kapiteln werden wir Aufgaben der Geometrie mit Hilfe von Vektoren in Koordinatendarstellung nach den Gesetzen der Vektorrechnung lösen.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. In wieviel Teile kann man eine Ebene durch ein orthogonales Koordinatensystem zerlegen? Wie heißen die Teile?
2. In wieviel Teile kann man den Raum durch ein orthogonales Koordinatensystem zerlegen? Wie heißen die Teile?
3. Wie ist $\boldsymbol{i}$ definiert?
4. Wie ist $\boldsymbol{j}$ definiert?
5. Wie ist $\boldsymbol{k}$ definiert?
6. Was sind Ortsvektoren?
7. Warum nennt man das $\boldsymbol{i}$-$\boldsymbol{j}$-$\boldsymbol{k}$-System ein orthonormiertes Rechtssystem?
8. Aus welchen Komponenten besteht der Vektor $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$?
9. Welche Koordinaten hat der Vektor $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$?
10. Wie kann man $\boldsymbol{m} = 7\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ verkürzt schreiben?
11. Wie schreibt man $\boldsymbol{p} = (2, -3, -7)$ als Summe von Komponenten?

Aufgaben

1. Wo liegen die Punkte?

$P_1(1; 1; 1)$, $P_2(-3; 0; 5)$

► P_1 liegt im 1. Oktanten.

► P_2 liegt in der x-z-Ebene, zwischen dem 2. und 3. Oktanten.

$A(3; -2; 2)$	$B(2; 0; 3)$	$C(-3; 0; 0)$
$D(-2; -3; -4)$	$E(0; 5; -7)$	$F(0; 7; 0)$
$G(1; 3; -7)$	$H(6; 7; 0)$	$I(0; 0; -4)$

2. Geben Sie zu den in einem Koordinatensystem $\{0: \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ gegebenen Punkten die Ortsvektoren an!

$P(-1; 3; 2)$; $Q(0; 3; -1)$; $R(2; -1; 5)$

60. Rechnen mit Vektoren in Koordinatendarstellung

60.1. Gleichheit von Vektoren

Zwei Vektoren $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$ und $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$ sind genau dann gleich, wenn ihre Koordinaten paarweise gleich sind:

■ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \leftrightarrow a_x = b_x \wedge a_y = b_y \wedge a_z = b_z$

60.2. Addition und Subtraktion von Vektoren

Man addiert bzw. subtrahiert Vektoren, indem man die entsprechenden Koordinaten addiert bzw. subtrahiert. Wir wollen diesen Satz bezüglich der Addition beweisen.

Voraussetzung: $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z) \quad \boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$

Behauptung: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

Beweis: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) + (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k})$
$= (a_x + b_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\,\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\,\boldsymbol{k}$
$= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ w. z. b. w.

Entsprechend gilt: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$

Beispiele:

(1) $a = (3; -4; 5) \quad b = (2; 0; -6)$

Wie groß sind $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$?

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (5; -4; -1) \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (1; -4; 11)$

(2) Wenn zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben sind, so bestimmt man den Vektor P_1P_2 mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{OP}_1$ und $\boldsymbol{OP}_2$:

■ $\boldsymbol{P_1P_2} = \boldsymbol{OP}_2 - \boldsymbol{OP}_1$
denn: $\boldsymbol{OP}_1 + \boldsymbol{P_1P_2} = \boldsymbol{OP}_2$

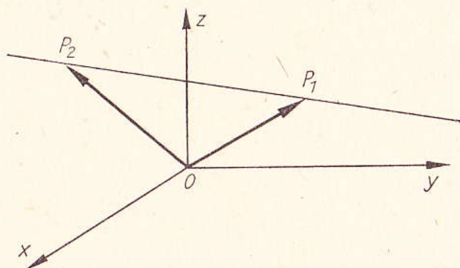


Abb. 60.1. $\boldsymbol{P_1P_2} = \boldsymbol{OP}_2 - \boldsymbol{OP}_1$

Zahlenbeispiel:

gegeben: $P_1(7; 4; -3) \quad P_2(4; -7; 2)$ gesucht: $\boldsymbol{P_1P_2}; \ \boldsymbol{P_2P_1}$

Lösung: $\boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{P_2P_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{P_1P_2}$

60.3. Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen

Man multipliziert einen Vektor mit einer reellen Zahl, indem man jede Koordinate des Vektors mit der reellen Zahl multipliziert.

Voraussetzung: $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z); \quad r \in R$

Behauptung: $r\boldsymbol{a} = (ra_x, ra_y, ra_z)$

Beweis: $r\boldsymbol{a} = r(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = ra_x\boldsymbol{i} + ra_y\boldsymbol{j} + ra_z\boldsymbol{k}$
$= (ra_x, ra_y, ra_z)$ w. z. b. w.

Anmerkung: Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_1P_2}$ mit $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$ ist der Punkt $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

denn:

$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OP}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{P_1P_2}$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} \\ y_1 + \frac{y_2}{2} - \frac{y_1}{2} \\ z_1 + \frac{z_2}{2} - \frac{z_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \frac{z_1 + z_2}{2} \end{pmatrix}$$

60.4. Skalare Multiplikation von Vektoren

60.4.1. Skalare Multiplikation der Einheitsvektoren *i, j, k*

$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$
$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$
$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$

■ Das skalare Produkt eines Vektors der Basis $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ mit sich selbst ist 1.

$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$
$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$

■ Das skalare Produkt von zwei verschiedenen Vektoren der Basis $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ist 0.

60.4.2. Skalare Multiplikation von zwei beliebigen Vektoren

■ Das skalare Produkt von zwei Vektoren ist die Summe aus den Produkten der entsprechenden Koordinaten.

Voraussetzung: $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$

Behauptung: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y a_y + a_z b_z$

Beweis:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \cdot (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k})\\ &= a_x b_x \cdot 1 + a_x b_y \cdot 0 + a_x b_z \cdot 0 + a_y b_x \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1\\ &\quad + a_y b_z \cdot 0 + a_z b_x \cdot 0 + a_z b_y \cdot 0 + a_z b_z \cdot 1\\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\end{aligned}$$
w. z. b. w.

Beispiel:

gegeben: $\boldsymbol{a} = (2;\ -4;\ -7) \quad \boldsymbol{b} = (5;\ -3;\ 4)$ gesucht: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

Lösung: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 10 + 12 - 28 = -6$

60.5. Vektorielle Multiplikation von Vektoren

60.5.1. Vektorielle Multiplikation der Einheitsvektoren $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ denn $|\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0° = 0$
$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$ denn $|\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0° = 0$
$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ denn $|\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0° = 0$

■ Das vektorielle Produkt eines Vektors der Basis $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ mit sich selbst ist der Nullvektor.

$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ denn $|\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90° = 1$
$\boldsymbol{k}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{i}$ und auf $\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Entsprechend gilt:

$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sind im positiven Drehsinn angeordnet. Die Vektoren werden zyklisch vertauscht, wenn man sich im positiven Drehsinn bewegt.

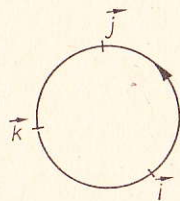


Abb. 60.2.

■ Das Vektorprodukt aus zwei verschiedenen Vektoren der Basis $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ergibt bei zyklischer Vertauschung den dritten Basisvektor.

Bei nichtzyklischer Vertauschung erhält man den dritten Basisvektor mit negativem Vorzeichen.

60.5.2. Vektorielle Multiplikation von zwei beliebigen Vektoren

■ Das vektorielle Produkt von zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist ein Vektor, den man als Determinante

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

schreiben kann.

Voraussetzung: $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$

Behauptung: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Beweis:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \times (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k})\\ &= a_x b_x \boldsymbol{o} + a_x b_y \boldsymbol{k} + (-a_x b_z \boldsymbol{j}) + (-a_y b_x \boldsymbol{k}) + a_y b_y \boldsymbol{o}\\ &\quad + a_y b_z \boldsymbol{i} + a_z b_x \boldsymbol{j} + (-a_z b_y \boldsymbol{i}) + a_z b_z \boldsymbol{o}\\ &= \boldsymbol{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \boldsymbol{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \boldsymbol{k}(a_x b_y - a_y b_x)\\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$
w. z. b. w.

Beispiel:

$\boldsymbol{a} = (2;\ -4;\ -7) \quad \boldsymbol{b} = (5;\ -3;\ 4)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -4 & -7 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} &= \boldsymbol{i}(-16 - 21) - \boldsymbol{j}(8 + 35) + \boldsymbol{k}(-6 + 20)\\ &= -37\boldsymbol{i} - 43\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}\\ &= (-37;\ -43;\ 14)\end{aligned}$$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Unter welcher Bedingung sind die Vektoren $\boldsymbol{m} = (m_x, m_y, m_z)$ und $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ gleich?
2. Wie addiert man zwei Vektoren?
3. Wie multipliziert man einen Vektor mit einer reellen Zahl?
4. Welchen Wert hat $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}$?
5. Welchen Wert hat $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$?
6. Welchen Wert hat das skalare „Quadrat“ eines Einheitsvektors?
7. Welchen Wert hat das skalare Produkt von 2 orthogonalen Vektoren?
8. Wie berechnet man das skalare Produkt von zwei beliebigen Vektoren, wenn die Koordinaten bekannt sind?

9. Was ergibt $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}$?
10. Was ergibt $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}$?
11. Was ist das vektorielle Produkt von zwei verschiedenen orthogonalen Einheitsvektoren?
12. Wie berechnet man das Vektorprodukt $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{m}$ aus $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$ und $\boldsymbol{m} = (m_x, m_y, m_z)$?

Aufgaben

1. Gegeben sind die Vektoren

$\boldsymbol{a} = (2, 1, 3)$; $\boldsymbol{b} = (3, 2, -2)$ und $\boldsymbol{c} = (-4, -2, 0)$.

Gesucht sind $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

2. Berechnen Sie den Vektor P_1P_2!

1. $P_1(1; 2; 3)$	$P_2(-1; 0; 2)$
2. $P_1(1; 0; 0)$	$P_2(3; 4; 5)$
3. $P_1(-2; 4; -8)$	$P_2(-5; -2; 7)$

3. Bestimmen Sie die Mittelpunkte der Strecken P_1P_2 aus 2.!

4. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, für den $\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ ist, wenn gilt:

1. $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$
2. $\boldsymbol{OA} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$
3. $\boldsymbol{OA} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$
4. $\boldsymbol{OA} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{OB} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$

5. Berechnen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC mit $A(3; 1; 2)$, $B(-2; 0; -1)$ und $C(2; -1; 2)$!

6. Bilden Sie das Skalarprodukt aus $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ und

$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{f} = (-1, 1, -1)$
$\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{g} = (-1, 2, 4)$
$\boldsymbol{d} = -4\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{h} = (2, -3, 1)$
$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{l} = (1, 0, 0)$

7. Eine Kraft $\boldsymbol{F} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ (Komponenten in N) verschiebt einen Körper vom Punkt $P(7; 8; 3)$ zum Punkt $Q(4; 9; 5)$ (Koordinaten in m) geradlinig.

1. Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{s}$ der Translation!
2. Berechnen Sie die mechanische Arbeit, die die Kraft $\boldsymbol{F}$ längs des Weges $\boldsymbol{s}$ verrichtet!

8. Berechnen Sie $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ für

1. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
2. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
3. $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = -4\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$
4. $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{k}$

9. Eine Kraft $\boldsymbol{F}$ greife am Punkt P eines Körpers an, der um den Punkt Z drehbar sei. Wie groß ist das Drehmoment $\boldsymbol{M}$?
$\boldsymbol{F} = (2, -4, 5)$ (in N) $P(4, -2, 3)$ (in m) $Z(3, 2, -1)$
Prüfen Sie, ob das berechnete Drehmoment $\boldsymbol{M}$ senkrecht auf $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{r}$ steht!

10. Berechnen Sie!

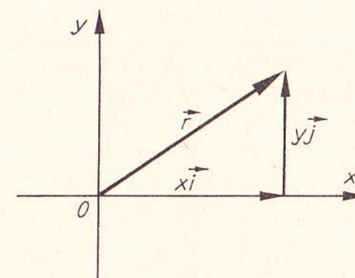
1. $(\boldsymbol{i} \times (-\boldsymbol{j})) \cdot (\boldsymbol{k} \times (-\boldsymbol{i})) =$
2. $((-\boldsymbol{j}) \times \boldsymbol{i}) \times (\boldsymbol{i} \times (-\boldsymbol{k})) =$
3. $\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{j} \times (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) =$
4. $(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) \cdot (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) - (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) =$

61. Betrag und Richtung eines Vektors in Koordinatendarstellung

61.1. Betrag eines Vektors

Ebene: gegeben: $\boldsymbol{r} = (x; y)$
gesucht: $|\boldsymbol{r}| = r$

Raum: gegeben: $\boldsymbol{r} = (x; y; z)$
gesucht: $|\boldsymbol{r}| = r$



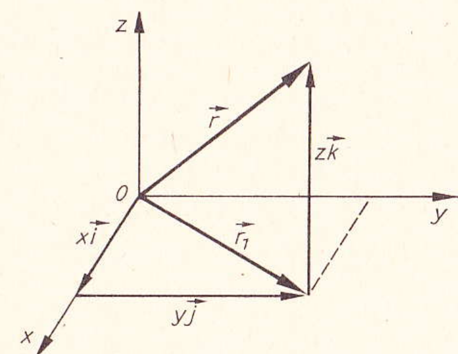


Abb. 61.1.

■ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2}$

$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{r_1^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$= \sqrt{\boldsymbol{r}^2}$

Der Betrag eines Vektors ist gleich der Wurzel aus der Summe der Koordinatenquadrate. Der Betrag eines Vektors ist gleich der Wurzel aus dem skalaren Produkt eines Vektors mit sich selbst.

Beispiele:

■ (1) Wie groß ist die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$ in cm, wenn $P_1(5; 3; -7)$ und $P_2(-2; 3; -4)$ sind? Wie groß ist $\sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, wenn $\boldsymbol{OP_1} = \boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{OP_2} = \boldsymbol{b}$ sind?

$$\boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\3\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\cos \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{a \cdot b}$$

$$= \frac{-10 + 9 + 28}{\sqrt{25 + 9 + 49} \cdot \sqrt{4 + 9 + 16}}$$

$$= \frac{27}{\sqrt{83} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}5503$$

$$\sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \approx 33{,}4°$$

$$|\boldsymbol{P_1P_2}| = \sqrt{49 + 0 + 9} = \sqrt{56} \approx 7{,}48$$

Die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$ beträgt 7,48 cm.

(2) gegeben: $A(-1; 3; 2)$; $B(-3; 0; 2)$; $C(2; 1; -2)$

Längen in m

gesucht: Flächeninhalt A des Dreiecks ABC

Lösung: Bekanntlich ist $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = a \cdot b \cdot \sin \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ der Zahlenwert des Flächeninhalts des Parallelogramms, das von den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt wird.

Weiterhin ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC halb so groß wie der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{AC}$ aufgespannt wird. Deshalb gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC:

$$A = \tfrac{1}{2}\,|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}|\ FE.$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -2 & -3 & 0\\ 3 & -2 & -4\end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(12 - 0) - \boldsymbol{j}(8 - 0) + \boldsymbol{k}(4 + 9)$$

$$= \begin{pmatrix}12\\-8\\13\end{pmatrix}.$$

$$|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}| = \sqrt{144 + 64 + 169} = \sqrt{377} = 19{,}4$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt $\frac{19{,}4}{2}\ \text{m}^2 = 9{,}7\ \text{m}^2$.

61.2. Einheitsvektoren

► **Def.:** Ein Vektor, der die gleiche Richtung und gleiche Orientierung wie ein Vektor $\boldsymbol{a}$ und den Betrag 1 hat, heißt der Einheitsvektor zum Vektor $\boldsymbol{a}$. Man schreibt: $\boldsymbol{a}^0$

gegeben: $\boldsymbol{r} = (x; y; z)$ gesucht: $\boldsymbol{r}^0$

Lösung:

$$\boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{1}{r}\boldsymbol{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\\[2ex] \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{x}{r}\\[1ex] \dfrac{y}{r}\\[1ex] \dfrac{z}{r}\end{pmatrix}$$

Beispiel:

■ $\boldsymbol{a} = (3, -2, 4)$ $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{9 + 4 + 16}}\,\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a}^0 = \left(\frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}\right)$$

$$\text{Probe: } |\boldsymbol{a}^0| = \sqrt{\frac{9}{29} + \frac{4}{29} + \frac{16}{29}} = \sqrt{\frac{29}{29}} = 1$$

61.3. Richtung eines Vektors

61.3.1. Richtung eines Vektors in der Ebene

gegeben: $\boldsymbol{r} = (x; y; 0)$ gesucht: Richtung von $\boldsymbol{r}$

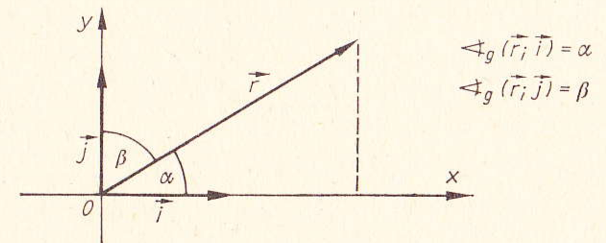


Abb. 61.2.

Die Richtung des Vektors $\boldsymbol{r}$ wird durch die Winkel α und β festgelegt. α bzw. β liegen zwischen den Vektoren $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{i}$ bzw. $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{j}$. α und β sind nicht unabhängig voneinander. Zum Beispiel gilt im ersten Quadranten immer $\alpha + \beta = 90°$.

Wir wählen α und β immer so, daß $0° \leqq \alpha, \beta \leqq 180°$ sind. Aus der Zeichnung können wir folgende Beziehung ablesen:

■ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ und $\cos\beta = \frac{y}{r}$.

Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man die Winkel α und β mit Hilfe des skalaren Produkts berechnet. Bekanntlich gilt: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \cdot b \cdot \cos \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ und damit $\cos \sphericalangle_g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{a \cdot b}$.

Entsprechend ergeben sich

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{i}}{r \cdot i} = \frac{(x; y; z) \cdot (1; 0; 0)}{r \cdot i} = \frac{x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0}{r \cdot 1} = \frac{x}{r}$$

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}}{r \cdot j} = \frac{(x; y; z) \cdot (0; 1; 0)}{r \cdot j} = \frac{y}{r}$$

Wir bezeichnen $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ als die Richtungskosinus des Vektors $\boldsymbol{r}$. Also gilt der Satz: Die Richtungskosinus eines Vektors sind die Quotienten aus den entsprechenden Koordinaten und dem Betrag des Vektors.

Beispiel: Welche Richtung hat der Vektor $\boldsymbol{r} = (3, -4)$?
$x = 3$ und $y = -4$. Der Vektor liegt im 4. Quadranten.

$$r = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \quad \cos\beta = \frac{-4}{5}$$

$$\alpha = 53{,}1° \quad \beta = 180° - 36{,}9° = 143{,}1°.$$

61.3.2. Richtung eines Vektors im Raum

gegeben: $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$

gesucht: Richtung von $\boldsymbol{r}$, d. h.

$$\alpha = \sphericalangle(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{i})$$
$$\beta = \sphericalangle(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{j})$$
$$\gamma = \sphericalangle(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k})$$

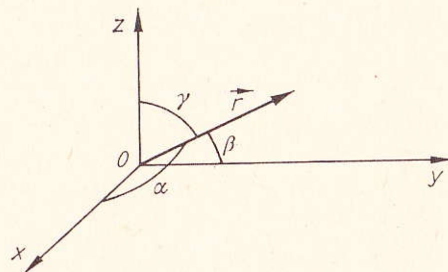


Abb. 61.3.

Für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ erhalten wir auch hier $\frac{x}{r}$ bzw. $\frac{y}{r}$.

Weiterhin ist $\cos\gamma = \frac{z}{r}$; denn $\cos\gamma = \cos \sphericalangle_g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}}{r \cdot k} = \frac{z}{r}$

■ Auch im Raum gilt: Die Richtungskosinus eines Vektors sind die Quotienten aus den entsprechenden Koordinaten und dem Betrag des Vektors:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Folgerungen aus der Richtung von Vektoren:

■ 1. Die Winkel α, β und γ sind nicht unabhängig voneinander. Es gilt: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Voraussetzung: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $\cos\beta = \frac{y}{r}$; $\cos\gamma = \frac{z}{r}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Behauptung: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Beweis: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$

w. z. b. w.

■ 2. $|\cos\gamma| = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$

■ 3. Von α, β und γ kann nur ein Winkel kleiner als 45° sein.

Beweis: (indirekt)

Voraussetzung: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\cos 45°)^2 = 1/2$

Die Kosinusfunktion ist im 1. Quadranten fallend,
d. h. $(\cos\alpha)^2 > \frac{1}{2}$, wenn $\alpha < 45°$ ist.

Behauptung: Wenn $\alpha < 45°$ ist, sind $\beta > 45°$ und $\gamma > 45°$. (O. B. d. A.)

Gegenannahme: Wenn $\alpha < 45°$ ist, so ist $\beta < 45°$ oder $\gamma < 45°$.
O. B. d. A.: $\alpha < 45°$ und $\beta < 45°$.

$\cos^2\alpha > 1/2$
$\cos^2\beta > 1/2$
$\cos^2\gamma \geqq 0$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma > 1$ im Widerspruch zur 1. Folgerung.

w. z. b. w.

■ 4. Die Koordinaten des Einheitsvektors $\boldsymbol{r}^0$ sind die Richtungskosinus des Vektors $\boldsymbol{r}$.

Voraussetzung: $\boldsymbol{r} = (x, y, z) \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \cos\beta = \frac{y}{r} \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$

Behauptung: $\boldsymbol{r}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Beweis: $\boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{(x, y, z)}{r} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

w. z. b. w.

Beispiele:

Welchen Betrag und welche Richtung hat der Vektor $\boldsymbol{a} = (2, -1, -2)$?

$a = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$

$\cos\alpha = 2/3 \quad \cos\beta = -1/3 \quad \cos\gamma = -2/3$

$\alpha = 48{,}2° \quad \beta = 180° - 70{,}5° \quad \gamma = 180° - 48{,}2°$

$\beta = 109{,}5° \quad \gamma = 131{,}8°$

Ein Vektor $\boldsymbol{r}$ hat den Betrag $r = 2\sqrt{2}$. Die Richtungswinkel betragen $\alpha = 60°$, $\beta = 135°$, $\gamma < 90°$. Welche Koordinaten hat $\boldsymbol{r}$?
Wir bestimmen zuerst mit $\cos\gamma$ mit $\cos\gamma > 0$.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$1/4 + 1/2 + \cos^2\gamma = 1 \qquad |\cos\gamma| = 1/2$

$\cos^2\gamma = 1 - 1/4 - 1/2 = 1/4 \qquad \cos\gamma_1 = 1/2 \quad \gamma_1 = 60°$

$\cos\gamma_2 = -1/2$ entfällt

$$\boldsymbol{r}^0 = \left(1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\boldsymbol{r} = r \cdot \boldsymbol{r}^0 = 2 \cdot \sqrt{2}\left(1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2\right) = \left(\sqrt{2}, -2, \sqrt{2}\right)$$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie groß sind die Beträge der Vektoren $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y)$ und $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$?
2. Welche Koordinaten hat der Vektor $\boldsymbol{r}^0$, wenn $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$ ist?
3. Durch welche Winkel wird die Richtung eines Vektors bestimmt?
4. Welchen Wert hat $\cos\alpha = \cos \measuredangle_g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{i})$?
5. Welchen Wert hat $\cos\gamma = \cos \measuredangle_g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k})$?
6. Kann man bei einem Ortsvektor $\boldsymbol{p}$ die Winkel α, β, γ beliebig festlegen?
7. Welche Beziehung besteht zwischen den Größen dieser Winkel α, β, γ?
8. Wie viele dieser Winkel α, β, γ können kleiner als 45° sein?
9. Muß einer dieser Winkel α, β, γ kleiner als 45° sein?
10. Welche Beziehung besteht zwischen den Richtungskosinus eines Vektors $\boldsymbol{m}$ und den Koordinaten des Einheitsvektors $\boldsymbol{m}^0$?

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Einheitsvektoren zu folgenden Vektoren!

$\boldsymbol{a} = (2, -3, 0) \quad \boldsymbol{c} = (1, 1, 1) \quad \boldsymbol{e} = (5, 0, 0)$

$\boldsymbol{b} = (-4, 3, 1) \quad \boldsymbol{d} = (0, 1, 0) \quad \boldsymbol{f} = \left(\tfrac{1}{4}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

2. Welchen Betrag und welche Richtung hat $\boldsymbol{r} = (-3, 8, 5)$?

3. Von einem Vektor $\boldsymbol{a}$ sind $\alpha = 135°$, $\beta = 60°$, $a_z = -2$ gegeben. Welche Koordinaten hat $\boldsymbol{a}$?

4. Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$!

1. $A(1, 1)$ und $B(4, 2)$
2. $A(-2, 7)$ und $B(0, -5)$
3. $A(1, -2)$ und $B(-6, 1)$
4. $A(a + b, a - b)$ und $B(a - b, a + b)$

5. Berechnen Sie die Seitenlängen der Dreiecke, deren Eckpunkte folgende Ortsvektoren haben!

1. $\boldsymbol{OA} = 9\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{OB} = -5\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{OC} = 13\boldsymbol{j}$
2. $\boldsymbol{OA} = (a + b)(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \quad \boldsymbol{OB} = -(a + b)(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \quad \boldsymbol{OC} = (a + b)(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$

6. Gegeben ist das Dreieck mit den Eckpunkten $A(3; -1; 6)$, $B(0; -4; 2)$ und $C(-3; 2; 1)$.

1. Prüfen Sie, ob das Dreieck gleichschenklig ist!
2. Berechnen Sie den Winkel, der der größten Seite gegenüberliegt!
3. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit Hilfe des Vektorprodukts!

7. Gegeben sind folgende Vektoren:

$\boldsymbol{a} = \left(-\tfrac{1}{8}\sqrt{2}, \tfrac{5}{8}\sqrt{2}, \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\right) \quad \boldsymbol{c} = \left(\tfrac{1}{4}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$\boldsymbol{b} = \left(-\tfrac{3}{8}\sqrt{6}, -\tfrac{1}{8}\sqrt{6}, \tfrac{1}{4}\right)$

1. Berechnen Sie $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$! Was sagt Ihnen das Ergebnis?
2. Berechnen Sie $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{b}^2$, $\boldsymbol{c}^2$! Was sagt Ihnen das Ergebnis?
3. Was folgt aus 1. und 2.?

8. Berechnen Sie die Winkel, die der Vektor $\boldsymbol{x}$ mit den Basisvektoren des Koordinatensystems $(0, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ bildet!

1. $\boldsymbol{x} = (3, 4, 0)$ 2. $\boldsymbol{x} = (2, 3, 4)$ 3. $\boldsymbol{x} = (-5, -4, 3)$

9. Prüfen Sie, ob das Viereck mit den Eckpunkten $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$ und $D(4, 7, -2)$ ein Quadrat ist!
Anleitung: Zeigen Sie, daß $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BC}| = |\boldsymbol{CD}| = |\boldsymbol{DA}|$, $\measuredangle_g ABC = \measuredangle_g BCD = 90°$ sind!

10. Ein Körper ist im Punkte Z (0; 0; 0) drehbar gelagert. Im Punkte P(4; 3; 0) (Koordinaten in m) wirkt die Kraft $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ (Koordinaten in N).

1. Berechnen Sie das Drehmoment $\boldsymbol{M}$ der Kraft $\boldsymbol{F}$ bezüglich Z!
2. Wie groß ist der Betrag des Drehmoments?
3. Erläutern Sie das Ergebnis, indem Sie das Ergebnis und die Aufgabenstellung vergleichen!

11. Eine Kraft vom Betrag $F = 6$ N, die einen Körper von P (2, −2, 1) nach Q (3, 4, 5) (Koordinaten in m) bewegt, besitzt die Richtung des Vektors $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

1. Bestimmen Sie den Einheitsvektor $\boldsymbol{r}^0$!
2. Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{F}$!
3. Bestimmen Sie den Vektor der Translation $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{PQ}$!
4. Berechnen Sie die Arbeit, die die Kraft $\boldsymbol{F}$ längs des Weges $\boldsymbol{s}$ verrichtet!

Analytische Geometrie

62. Aufgaben der analytischen Geometrie

Die analytische Geometrie hat die Aufgabe, die Eigenschaften von Figuren sowie Relationen zwischen Figuren rechnerisch zu untersuchen. In der Kleinen Enzyklopädie Mathematik, Leipzig 1965, heißt es auf Seite 341:
„Der Grundgedanke der analytischen Geometrie besteht darin, daß geometrische Untersuchungen mit rechnerischen Methoden geführt werden. Dieses Verfahren hat sich als außerordentlich fruchtbar erwiesen. Die Verschmelzung geometrischen und algebraischen Denkens in Verbindung mit dem funktionalen Denken stellt ein mächtiges Hilfsmittel des menschlichen Verstandes zur Erforschung und Erfassung der objektiven Realität dar."
Mit der Schaffung der Grundlagen der analytischen Geometrie und der Differential- und Integralrechnung erfolgte im 17. und 18. Jahrhundert der Übergang zur modernen Mathematik. Die Herausbildung der modernen Mathematik fiel in eine Zeit revolutionärer gesellschaftlicher Veränderungen, die Entstehungszeit des Kapitalismus. Mit der Entwicklung der kapitalistischen Produktionsverhältnisse wuchsen die Anforderungen an die Naturwissenschaft, insbesondere an die Mechanik und damit auch an die Mathematik.
Wesentliche Grundlagen der analytischen Geometrie sind von René Descartes (1595–1650) und Pierre de Fermat (1601–1655) geschaffen worden. Das erste Lehrbuch der analytischen Geometrie veröffentlichte 1748 Leonhard Euler (1707–1783).
In der analytischen Geometrie erfolgt das Vorgehen in einem gewissen Sinn umgekehrt wie in der Analysis (Lehre von Funktionen). In der Analysis beschäftigt man sich mit Relationen zwischen Zahlen und benutzt Graphen bzw. Figuren als Hilfsmittel. Dagegen beschäftigt man sich in der analytischen Geometrie mit

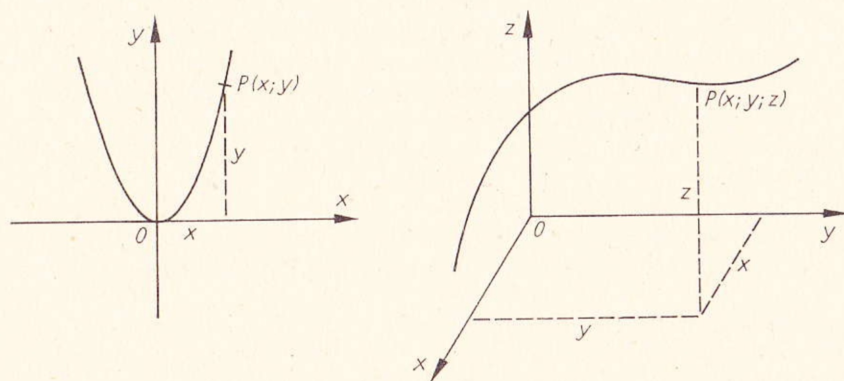


Abb. 62.1.

Figuren und benutzt reelle Zahlen als Hilfsmittel. Von grundlegender Bedeutung für die analytische Geometrie ist es, daß man mit Hilfe eines Koordinatensystems jedem Punkt P der Ebene bzw. des Raumes ein Zahlenpaar bzw. ein Zahlentripel eineindeutig zuordnen kann. Deshalb wird ein Punkt in der analytischen Geometrie durch seine Koordinaten gegeben.
Punktmengen (Figuren) werden im allgemeinen durch Gleichungen beschrieben. Deshalb ist es eine wichtige Aufgabe der analytischen Geometrie, zu einer gegebenen Figur die zugehörige Gleichung oder die zugehörigen Gleichungen zu finden.
Wie macht man das?

■ Man legt die gegebene Figur in ein zweckmäßiges Koordinatensystem und sucht eine Beziehung, die zwischen den Koordinaten jedes Punktes P der Figur und den Größen besteht, die die Figur definieren. Man sagt auch: Man sucht eine Beziehung, die zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes P der Punktmenge und den Größen besteht, die die Punktmenge definieren. Die Koordinaten dieses beliebigen Punkts P sind also Variable. Deshalb schreibt man sie ohne Indizes: $P(x; y; z)$. Dagegen schreibt man die Koordinaten eines bestimmten Punktes P_1 mit Indizes: $P_1(x_1; y_1; z_1)$.

Beispiele:

Kreis um $0(0; 0)$ mit dem Radius r

Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

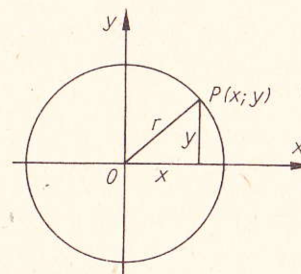


Abb. 62.2.

Gerade durch $0(0; 0)$ mit dem Anstiegswinkel α

Gleichung der Geraden

$$\tan\alpha = m = \frac{y}{x}$$

$y = mx \qquad y - mx = 0$

$y = f(x) \qquad F(x; y) = 0$

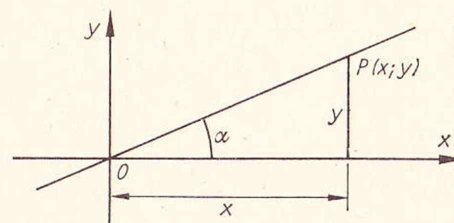


Abb. 62.3.

Aus diesen Darlegungen ergibt sich die Folgerung:
Genau dann, wenn die Koordinaten x_0, y_0 eines Punktes P_0 die Gleichung $F(x; y) = 0$ erfüllen, liegt der Punkt $P_0(x_0; y_0)$ auf der zu $F(x; y) = 0$ gehörigen Kurve.

Beispiel:

Der Punkt $P_1(-2; 3)$ liegt auf der Kurve mit der Gleichung $y = x^2 - 3x - 7$. Dagegen liegt der Punkt $P_2(2; 3)$ nicht auf dieser Kurve.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Was ist die Aufgabe der analytischen Geometrie?
2. Wodurch ist der Übergang zur modernen Mathematik gekennzeichnet?
3. Worauf ist die starke Entwicklung der Mathematik im 17. und 18. Jahrhundert zurückzuführen?
4. Welche Mathematiker waren an der Ausarbeitung der analytischen Geometrie beteiligt?
5. Wieso ist das Vorgehen der Analysis und der analytischen Geometrie in einem gewissen Sinne umgekehrt?
6. Wie findet man zu einer gegebenen Figur die zugehörige Gleichung?
7. Welche Gleichung gilt, wenn der Punkt $P_1(x_1; y_1)$ auf der Figur liegt, die zu $F(x; y) = 0$ gehört?

Aufgaben

1. Liegen folgende Punkte auf der Figur mit der Gleichung
$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$?
$A(-3; -4)$; $B(4; -3)$; $C(1; 24)$; $D(0; 6)$; $E(15; -\sqrt{200})$

2. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten, so daß die Punkte auf der Figur mit der Gleichung $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ liegen!

$A(4; y > 0)$ $B(-2; y < 0)$ $C(x; -6)$ $D(10; y)$

3. Erklären Sie das Aufstellen der Gleichung eines Kreises, der den Radius r besitzt!

4. Eine Kugel mit dem Radius $r = 3LE$ wird so in ein räumliches Koordinatensystem gelegt, daß ihr Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt.
Stellen Sie die Gleichung der Kugel auf!

63. Analytische Geometrie der Geraden in der Ebene

63.1. Geradengleichungen

63.1.1. Punktrichtungsgleichung einer Geraden

gegeben: $P_1(x_1; y_1) \in g$ $m = \tan\alpha$
gesucht: Geradengleichung

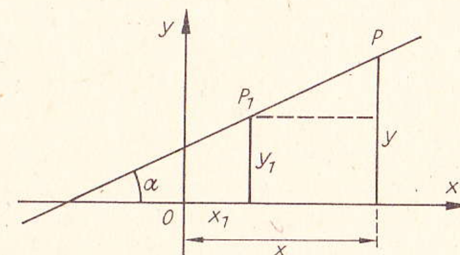


Abb. 63.1.

Wir wählen $P(x; y)$ beliebig auf der Geraden, aber $P \neq P_1$.

■ *Es gilt:* $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Beispiel:

gegeben: $P(2; 4)$ $m = -3$ gesucht: Geradengleichung

$\frac{y - 4}{x - 2} = -3$ $y - 4 = -3x + 6$ $y = -3x + 10$

Probe: $m = -3$ $P_1(2; 4) \in g$, denn $4 = -6 + 10$

63.1.2. Zweipunktegleichung einer Geraden

gegeben: $P_1(x_1; y_1) \in g$ $P_2(x_2; y_2) \in g$
$P_1 \neq P_2$
gesucht: Geradengleichung

■ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

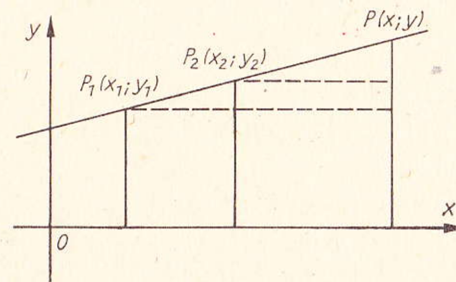


Abb. 63.2.

63.2. Schnittpunkt von zwei Geraden

gegeben: $g_1: y = m_1x + b_1$ gesucht: Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$
$g_2: y = m_2x + b_2$

■ Die Koordinaten des Schnittpunkts S sind die Lösungen des Gleichungssystems

$$y_s = m_1x_s + b_1$$
$$y_s = m_2x_s + b_2$$
$$m_1x_s + b_1 = m_2x_s + b_2$$
$$x_s(m_1 - m_2) = b_2 - b_1$$
$$x_s = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \quad y_s = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_1$$

■ Man unterscheidet 3 Fälle:

(1) Es gibt genau einen Schnittpunkt, wenn $g_1 \neq g_2 : m_1 \neq m_2$
(2) Es gibt keinen Schnittpunkt, wenn $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \neq g_2$:

$m_1 = m_2 \wedge b_1 \neq b_2$

(3) Es gibt unendlich viele Schnittpunkte, wenn $g_1 = g_2$:

$m_1 = m_2 \wedge b_1 = b_2$

63.3. Schnittwinkel von zwei Geraden

gegeben: $g_1: y = m_1x + b_1$ $m_1 = \tan \alpha_1$
$g_2: y = m_2x + b_2$ $m_2 = \tan \alpha_2$

gesucht: Schnittwinkel

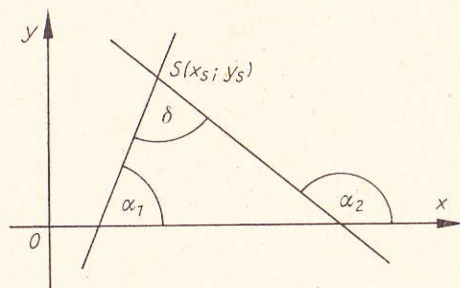


Abb. 63.3

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1$$
$$\tan \delta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \cdot \tan \alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$
$$\tan \delta > 0 \rightarrow \delta < 90°; \quad \tan \delta < 0 \rightarrow 90° < \delta < 180°$$
$$1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \rightarrow \delta = 90°$$

Aus der Formel $\tan \delta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$ sind die Bedingungen für Parallelität und Orthogonalität von zwei Geraden herleitbar:

■ Parallelität von Geraden $m_1 = m_2$

■ Orthogonalität von Geraden $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Beispiele:

gegeben: $P_1(-3; 5)$ $g_1: y = 2x + 3$
gesucht: (1) Parallele zu g_1 durch P_1
(2) Senkrechte zu g_1 durch P_1

zu (1): $m_1 = 2 \quad P_1(-3; 5)$

$$\frac{y-5}{x+3} = 2 \quad y - 5 = 2x + 6$$
$$y = 2x + 11$$

Probe: $m = 2 \quad P_1 \in g$

zu (2): $m_2 = -\frac{1}{2} \quad P_1(-3; 5)$

$$\frac{y-5}{x+3} = -\frac{1}{2} \quad y - 5 = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Probe: $m = -\frac{1}{2} \quad P_1 \in g$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie heißen die Punktrichtungsgleichung und die Zweipunktegleichung einer Geraden?
2. Wie heißt die Gleichung einer Geraden,
   1. die parallel zur x-Achse im Abstand 2 unterhalb der x-Achse verläuft?
   2. die parallel zur y-Achse im Abstand 4 rechts von der y-Achse verläuft?
   3. Welche dieser Gleichungen beschreibt eine Funktion von x?
3. Welche Gleichung hat die x-Achse?
4. Welche Gleichung hat die y-Achse?
5. Unter welcher Bedingung kann man die Zweipunkteformel bei zwei gegebenen Punkten nicht verwenden? Wie heißt die Gleichung der Geraden dann?
6. Wie bestimmt man den Schnittpunkt von zwei Geraden?
7. Wie bestimmt man den Schnittpunkt von zwei Graphen mit den Gleichungen $F_1(x; y) = 0$ und $F_2(x; y) = 0$?
8. Wieviel Punkte können zwei Geraden gemeinsam haben? Unter welchen Bedingungen?

9. Aus welcher Formel kann man die Bedingungen für die Parallelität und die Orthogonalität von zwei Geraden ablesen?
10. Unter welcher Bedingung sind zwei Geraden parallel?
11. Unter welcher Bedingung sind zwei Geraden orthogonal?

Aufgaben

1. Ergänzen Sie die fehlenden Wörter, und bilden Sie wahre Implikationen ohne Konjunktion!
Ein Punkt liegt auf einer Geraden.
Die Koordinaten dieses Punktes erfüllen die ...
► Liegt ein Punkt auf einer Geraden, erfüllen die Koordinaten dieses Punktes die Gleichung der Geraden.
1. Man setzt in der Gleichung $y - y_0 = \frac{a_y}{a_x}(x - x_0)$ für $\frac{a_y}{a_x} = m$. Man erhält die ... der Geraden.
2. Für zwei Geraden g_1 und g_2 gilt $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. g_1 ist ... zu g_2.
3. Für zwei Geraden g_1 und g_2 gilt $m_1 = m_2$. g_1 ist ... zu g_2.
4. In $y = mx + b$ ist $m = 0$. Die Gerade ist eine Parallele zur ...
5. Das Skalarprodukt von zwei Vektoren verschwindet. Die Vektoren sind ... zueinander.
6. Das Vektorprodukt von zwei Vektoren verschwindet. Die Vektoren sind ... zueinander.

2. Eine Gerade g geht durch den Punkt $P_0(-1; 3)$ und hat den Anstieg $m = -\frac{4}{5}$.
1. Wie heißt die Gleichung von g?
2. Wie heißt die Gleichung der Geraden g_1, die g in P_0 senkrecht schneidet?
3. Wie heißt die Gleichung der Geraden g_2, die parallel zu g ist und durch $P_2(2; 3)$ geht?

3. Die Eckpunkte eines Dreiecks sind $A(-2; 4)$; $B(3; 7)$; $C(4; 0)$.
1. Bestimmen Sie die Gleichungen der Dreiecksseiten!
2. Bestimmen Sie die Gleichungen der Höhen!
3. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Höhen!

4. Bestimmen Sie die Lage der Punkte $P_1(-1; 3)$; $P_2(0; -7)$; $P_3(-7; 0)$ und $P_4(3; 1)$ bezüglich der Geraden, die durch die Punkte $A(3; 5)$ und $B(1; 4)$ bestimmt ist!

5. Bestimmen Sie die Menge der Punkte $P(x; y)$, für die folgende Ungleichungen erfüllt sind!
1. $y > 3x + 1$
2. $y < 3x + 1$
3. $y < 2 - x$; $x > -2$; $y > -2$
4. $y > 2 - x$; $x < 4$; $y < 0$.

6. Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen des Kegelstumpfes, der durch Rotation der Strecke $\overline{SP}$ mit $S(0; r_1)$ und $P(h; r_2)$ um die x-Achse entsteht!

64. Geradengleichungen mit Parameter

Wir wollen jetzt die Gleichung einer Geraden im Raum aufstellen. Eine Gerade im Raum kann man *nicht* durch *eine* einzige Gleichung in den Variablen x, y und z analytisch darstellen. Wir werden zeigen, daß eine Gerade im Raum jedoch durch nur eine Vektorgleichung mit einem Parameter darstellbar ist.
Analog zur Aufstellung der Gleichung $F(x; y) = 0$ einer Figur in der x-y-Ebene geht man beim Aufstellen der Vektorgleichung $f(\boldsymbol{r}) = 0$ einer beliebigen Figur bezüglich $\{0; \boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}\}$ folgendermaßen vor:

■ 1. Man wählt einen beliebigen Punkt $P(x; y; z)$ auf der Figur.
2. Man sucht eine Beziehung zwischen dem Ortsvektor $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ dieses Punktes P und den Größen, die die Figur eindeutig bestimmen.

64.1. Punktrichtungsgleichung einer Geraden

Gegeben ist eine Gerade g durch einen Richtungsvektor $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$, der die Richtung von g angibt, und einen Punkt $P_0(x_0; y_0; z_0) \in g$ bzw. seinen Ortsvektor $\boldsymbol{OP_0} = \boldsymbol{r_0} = (x_0; y_0; z_0)$. Gesucht ist eine Gleichung von g.

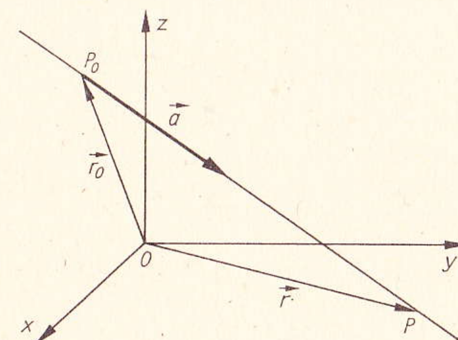


Abb. 64.1. Punktrichtungsgleichung einer Geraden

Aus der Zeichnung erkennt man, daß man den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ jedes beliebigen Punktes $P \in g$ als Summe aus dem gegebenen Ortsvektor $\boldsymbol{r_0}$ und einem Vektor $t\boldsymbol{a}$ mit $t \in R$ darstellen kann.

■ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{a}$

Das ist eine Vektorgleichung der Geraden g. In dieser Gleichung heißen t der Parameter der Geraden g und $\boldsymbol{a}$ der Richtungsvektor von g. Die Gleichung nennt man eine Parametergleichung von G. Jedem Punkt $P \in g$ wird durch diese Parametergleichung von g eineindeutig eine Zahl $t \in R$ zugeordnet.

Die Vektorgleichung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ kann ausführlicher geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{oder}$$

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x_0 + ta_x)\,\boldsymbol{i} + (y_0 + ta_y)\,\boldsymbol{j} + (z_0 + ta_z)\,\boldsymbol{k}$$

Man erkennt, daß man die Vektorgleichung auch als ein lineares skalares Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit einem Parameter schreiben kann:

$$x = x_0 + ta_x$$
$$y = y_0 + ta_y$$
$$z = z_0 + ta_z$$

Beispiele:

(1) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, die durch den Punkt $A(3;\,4;\,5)$ geht und den Richtungsvektor $\boldsymbol{a} = (-2;\,2;\,7)$ hat?

Lösung: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + t\boldsymbol{a}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{oder}$$

$$x = 3 - 2t$$
$$y = 4 + 2t$$
$$z = 5 + 7t$$

(2) Untersuchen Sie, ob die Punkte $P_1(2;\,3;\,4)$, $P_2(1;\,6;\,1)$, $P_3(-3;\,10;\,26)$ auf der Geraden g mit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{liegen!}$$

Zur Lösung dieser Aufgabe benutzt man folgenden Satz:
Ein Punkt liegt genau dann auf einer Geraden g, wenn sein Ortsvektor die Parametergleichung von g erfüllt.

Untersuchung für P_1

Annahme: $P_1 \in g$ bzw.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\exists!!\ t \in R\colon\ 2 = 3 - 2t \quad \text{(I)}$$
$$3 = 4 + 2t \quad \text{(II)}$$
$$4 = 5 + 7t \quad \text{(III)}$$

Beweis: (I) $2 = 3 - 2t$

$t = \frac{1}{2}$

(II) $3 = 4 + 2t$

$3 = 4 + 2 \cdot \frac{1}{2}$

$3 = 5 \qquad (f)$

Man erhält einen Widerspruch. Daraus folgt, daß die Annahme eine falsche Aussage ist. *Es gilt somit* $P_1 \notin g$.

Untersuchung für P_2

Annahme: $P_2 \in g$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Beweis: (I) $1 = 3 - 2t$

$t = 1$

(II) $6 = 4 + 2 \cdot 1$

$6 = 6 \qquad (w)$

(III) $1 = 5 + 7 \cdot 1$

$1 = 12 \qquad (f) \qquad$ Widerspruch

Es gilt: $P_2 \notin g$.

Untersuchung für P_3

Annahme: $P_3 \in g$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Beweis: (I) $-3 = 3 - 2t$

$t = 3$

(II) $10 = 4 + 2 \cdot 3$

$10 = 10 \qquad (w)$

(III) $26 = 5 + 7 \cdot 3$

$26 = 26 \qquad (w)$

Es gibt keinen Widerspruch zur Annahme.
Es gilt: $P_3 \in g$.

Anmerkung: Für Untersuchungen in der Ebene kann neben der parameterfreien Form $y = mx + n$ auch die Parametergleichung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ verwendet werden, wobei die Vektoren aber nur durch zwei Koordinaten dargestellt werden.

64.2. Zweipunktegleichung einer Geraden

Wenn man für eine Gerade g eine Parametergleichung aufstellen will, braucht man immer den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_1$ eines Punktes $P_1 \in g$ und einen Richtungsvektor $\boldsymbol{a}$ mit der Richtung von g. Entsprechend dieser Feststellung kann man auch die Vektorgleichung einer Geraden g aufstellen, wenn g durch zwei Punkte

$$P_1(x_1;\,y_1;\,z_1) \in g \quad \text{und}$$
$$P_2(x_2;\,y_2;\,z_2) \in g$$

gegeben ist.

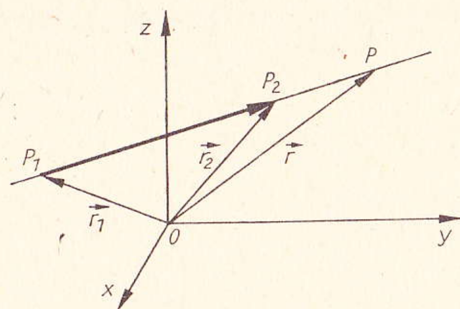


Abb. 64.2. Zweipunktegleichung einer Geraden

Lösung:

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ mit $\boldsymbol{r}_1$ als Ortsvektor von $P_1 \in g$ und $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P_1P_2}$ als Richtungsvektor von g.

Mit $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P_1P_2} = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ erhält man die Zweipunktegleichung der Geraden g:

■ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ oder

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$
$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

Beispiel:

Eine Gerade g ist durch die Punkte $A(-2; 3; 4)$ und $B(4; 5; 6)$ gegeben. Stellen Sie eine Vektorgleichung der Geraden g auf! Liegt $C(10; 7; 8)$ auf g? Wie groß ist t_c?

Lösung:

(1) Geradengleichung

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + t(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) Lage von C

Annahme: $C \in g$

Beweis:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 10 &= -2 + 6t \\ & & t &= 2 \\ &\text{(II)} & 7 &= 3 + 2 \cdot 2 \\ & & 7 &= 7 \quad (w) \\ &\text{(III)} & 8 &= 4 + 2 \cdot 2 \\ & & 8 &= 8 \quad (w) \end{aligned}$$

Kein Widerspruch zur Annahme.
Es gilt also $C \in g$.

(3) $t_C = 2$

Anmerkung: Man kann zur Aufstellung der Geradengleichung statt $\boldsymbol{r}_A$ auch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_B$ benutzen. Sowohl $\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$ als auch $\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B$ können als Richtungsvektoren von g gewählt werden. Mit $\boldsymbol{r}_B$ als Ortsvektor und $\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B$ als Richtungsvektor erhält man für g die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \bar{t}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Natürlich erfüllt der Ortsvektor von C auch diese Vektorgleichung. In diesem Falle ist $\bar{t}_C = -1$, denn es gilt:

(I) $10 = 4 - 6\bar{t}_C$ (II) $7 = 5 + (-1)(-2)$ (w)
$\bar{t}_C = -1$ (III) $8 = 6 + (-1)(-2)$ (w)

Für jede Gerade gibt es unendlich viele Parametergleichungen.

64.3. Parametergleichung und parameterfreie Gleichung einer Geraden

Man erhält aus der Parametergleichung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ einer Geraden eine parameterfreie analytische Darstellung der Geraden, indem man die Vektorgleichung als skalares Gleichungssystem schreibt und aus diesem Gleichungssystem den Parameter eliminiert.

Beispiele:

(1) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dieser Vektorgleichung entsprechen zwei skalare Gleichungen.

(I) $x = 2 - t$ (II) $y = 3 + 2t$

Aus diesen Gleichungen wird t eleminiert:

(I) $t = 2 - x$
(I)/(II) $y = 3 + 2(2 - x)$
$g\colon y = -2x + 7$

Die Elemination des Parameters ergibt für eine Gerade in der Ebene eine lineare Gleichung mit zwei Variablen.

(2) $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 23 \\ -14 \\ -1 \end{pmatrix}$, (I) $x = 15 + 23t$
(II) $y = -9 - 14t$
(III) $z = 1 - t$

Eine dieser Gleichungen löst man nach t auf und setzt den Term, den man für t erhält, in die anderen beiden Gleichungen ein.

(III) $t = 1 - z$
(III)/(I) $x = 15 + 23(1 - z)$
(III)/(II) $y = -9 - 14(1 - z)$
$g\colon x = -23z + 38$
$y = 14z - 23$

■ Wenn man den Parameter aus den drei skalaren Gleichungen für *eine Gerade im Raum* eleminiert, erhält man *ein lineares Gleichungssystem aus 2 linear unabhängigen Gleichungen in x, y, z.* Nur auf diese Weise kann eine Gerade im Raum parameterfrei dargestellt werden.

64.4. Projektionen von Geraden des Raumes auf die Koordinatenebenen

Die Projektion P_0' eines Punktes $P_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ auf die x-y-Ebene ist $P_0'\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entsprechend gilt für die Projektion einer Geraden g mit

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

auf die x-y-Ebene:

$$g'\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

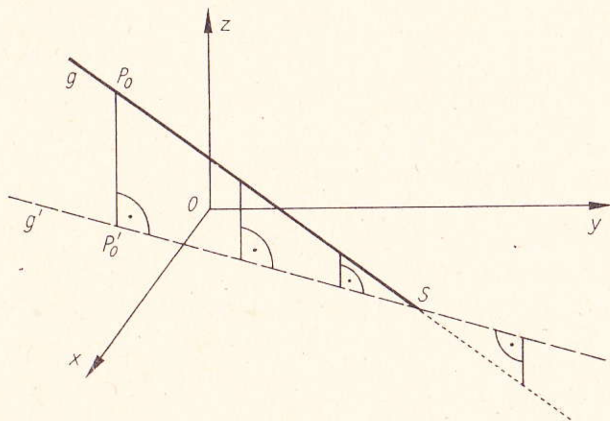


Abb. 64.3.

Es ergeben sich für die Projektionen von g

auf die x-z-Ebene g'': $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix}$

und

auf die y-z-Ebene g''': $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

64.5. Spurpunkte einer Geraden

Satz: Wenn eine Gerade g nicht parallel zu einer Ebene E ist, so schneidet g die Ebene in genau einem Punkt.

▶ **Def.:** Der Schnittpunkt einer Ebene E und einer zu E nichtparallelen Geraden g heißt der Spurpunkt der Geraden g in der Ebene E oder der Durchstoßpunkt von g durch E.

Der Spurpunkt S_{xy} einer Geraden g mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ in der x-y-Ebene ist

$$S_{xy} = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

S_{xy} liegt in der x-y-Ebene, also ist $z_s = 0$. Außerdem liegt S_{xy} auf der Geraden g.

Also gilt: $\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t_s\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$

Man berechnet die Koordinaten x_s, y_s des Spurpunktes $S_{xy}(x_s; y_s; 0)$ folgendermaßen:

1. Man berechnet t_S, indem man die 3. Gleichung $0 = z_0 + t_S \cdot a_z$ löst.
2. Man setzt den berechneten Wert t_S in die anderen Gleichungen ein:

$$x_s = x_0 + t_S \cdot a_x$$
$$y_s = y_0 + t_S \cdot a_y.$$

Analog dazu kann man die Spurpunkte $S_{xz}(x_s; 0; z_s)$ und $S_{yz}(0; y_s; z_s)$ in der x-y-Ebene bzw. in der y-z-Ebene berechnen.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Warum hat eine Parametergleichung einer Geraden genau einen Parameter?
2. Welche Formen der Parametergleichungen der Geraden gibt es?
3. Welcher Unterschied besteht zwischen den Parametergleichungen einer Geraden in der Ebene und einer Geraden im Raum?
4. Wie nennt man die orientierte Gerade durch 0, deren Richtungsvektor $\boldsymbol{i}$ ist?
5. Wie nennt man die orientierte Gerade durch 0, deren Richtungsvektor $\boldsymbol{j}$ ist?
6. Ist die Lage einer Geraden durch ihren Richtungsvektor eindeutig bestimmt?
7. Ist die Lage einer Geraden durch zwei Punkte eindeutig bestimmt?
8. Wie kann man feststellen, ob g_1 mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ orthogonal zu g_2 mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}_2$ ist?

9. Wie kann man feststellen, ob g_1 parallel zu g_2 ist?
10. Welche Koordinaten hat der Richtungsvektor $\boldsymbol{a}$, wenn die Gerade parallel zur y-Achse läuft?
11. Was erhält man, wenn in $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ der Parameter t nur das abgeschlossene Intervall $[t_1; t_2]$ durchläuft?
12. Welchen Punkt erhält man als die Projektion des Punktes $P_1(x_1; y_1; z_1)$ auf die x-z-Ebene?
13. Welche Koordinaten hat die Projektion eines Vektors $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$ auf die x-z-Ebene?
14. Welche Gleichung hat die Projektion der Geraden

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x_1 + ta_x)\,\boldsymbol{i} + (y_1 + ta_y)\,\boldsymbol{j} + (z_1 + ta_z)\,\boldsymbol{k}$$

auf die x-z-Ebene?

Aufgaben

1. Gegeben ist eine Gerade g durch den Punkt $P_1(-2; 3; 5)$ und den Richtungsvektor $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.
1. Es ist eine Vektorgleichung der Geraden aufzustellen!
2. Welche Punkte ergeben sich für $t = 0; \pm 1; \pm 3$?
3. Liegen $A(1; 3; 3)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-8; 6; 4)$ oder $D(7; 0; 11)$ auf g?

2. Eine Gerade geht durch $P_1(-1; 8; 6)$ und $P_2(11; -1; -9)$. Es soll untersucht werden, ob die Punkte $P_3(3; 5; 1)$ und $P_4(-5; 11; 8)$ auf der Geraden liegen!

3. Es soll untersucht werden, ob die beiden Geraden einander schneiden, die durch die Punktepaare $P_{11}(3; -2; 8)$, $P_{12}(1; 7; -1)$ und $P_{21}(3; 3; 1)$, $P_{22}(-2; 0{,}5; 13{,}5)$ bestimmt sind!

4. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die durch den Punkt $P_1(2; -1; 4)$ geht und die parallel
1. zur x-Achse,
2. zur y-Achse ist!

5. Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden, die
1. durch den Punkt $A(3; -4)$ geht und $\boldsymbol{j}$ als Richtungsvektor hat;
2. durch den Ursprung 0 geht und die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j})$ ist;
3. durch den Punkt $A(3; 1)$ geht und $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ zum Richtungsvektor hat!

6. Bestimmen Sie die parameterfreien Gleichungen zu
1. $\boldsymbol{r} = (3; 4) + t(0; 1)$
2. $\boldsymbol{r} = (0; 0) + t(1; 1)$
3. $\boldsymbol{r} = (3; 1) + t(3; 1)$

7. Stellen Sie fest, welcher der Punkte P_i auf der durch $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{a}$ bestimmten Geraden $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ liegt!
1. $\boldsymbol{r}_1 = (-3; 18)$; $\boldsymbol{a} = (-1; 1)$
   $P_1(6; 9)$; $P_2(10; 4)$; $P_3(17; -2)$
2. $\boldsymbol{r}_1 = (0; 8)$; $\boldsymbol{a} = (1; 1)$
   $P_1(-5; 3)$; $P_2(3; 11)$; $P_3(4; 3)$

8. Eine Gerade g gehe durch den Punkt $A(2; -2)$. Sie habe $\boldsymbol{AB} = (-6; 9)$ als Richtungsvektor,
1. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B!
2. Zeigen Sie, daß g durch den Punkt $C(0; 1)$ geht!

9. Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden, die durch die beiden gegebenen Punkte geht!
1. $A(2; 0)$; $B(0; 3)$
2. $C(3; 0)$; $D(0; -2)$
3. $E(5; 0)$; $F(0; 0)$

10. Eleminieren Sie den Parameter aus den Gleichungen, die Sie in der Aufgabe 9 aufgestellt haben!

11. Stellen Sie die gegenseitige Lage der gegebenen Geraden fest! Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Schnittpunkt!
1. g: $-3x + 5y = 2$; $\quad h$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. g: $y + 7x = 0$; $\quad h$: $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = (4 + t)\,\boldsymbol{i} + (5 + 7t)\,\boldsymbol{j}$
3. g: $3x + 2y - 6 = 0$; $\quad h$: $\boldsymbol{r} = (6; 13) + t(0; 4)$

12. Gegeben sind der Punkt $P_1(3; 2; -1)$ und der Richtungsvektor $\boldsymbol{a} = (-1; 1; -1)$ einer Geraden g.
1. Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden g an!
2. Berechnen Sie die Koordinaten der Spurpunkte in den Koordinatenebenen!
3. Bestimmen Sie die Parametergleichungen der Projektionen von g auf die Koordinatenebenen!

13. Wie lautet die Parametergleichung der Projektion von g auf die x-z-Ebene!
1. g: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + t(5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})$
2. g: $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - t\boldsymbol{j}$

14. Eine Gerade g gehe durch den Punkt $P_1(-2; 3; 5)$ und habe die Richtung des Vektors $\boldsymbol{a} = (3; -1; 2)$.
1. Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden an!
2. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spurpunktes von g in der x-y-Ebene!
3. Bestimmen Sie Parametergleichung und parameterfreie Gleichung der Projektion von g auf die x-y-Ebene!

65. Gleichungen von Ebenen im Raum

65.1. Parametergleichung einer Ebene

Eine beliebige Ebene E des Raumes ist durch einen Punkt $P_0 \in E$ und zwei nicht kollineare Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ eindeutig bestimmt.

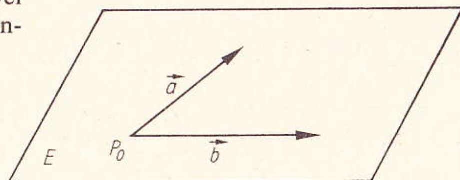


Abb. 65.1.

Jedem beliebigen Punkt $P \in E$ ist ein Vektor $\boldsymbol{P_0P}$ zugeordnet. Wie wir wissen, kann man jeden Vektor $\boldsymbol{P_0P}$ aus $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ linear kombinieren.

$\forall P_0P \in E$: $\boldsymbol{P_0P} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$, wobei $u \in R$ und $v \in R$ Parameter sind.

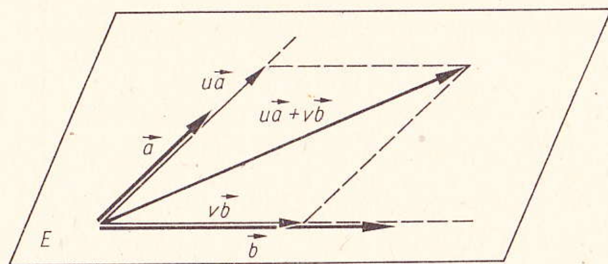


Abb. 65.2.

Im Beispiel, das in der Zeichnung dargestellt ist, gilt $u > 1$ und $0 < v < 1$. Nun wollen wir die Ebene E bezüglich eines räumlichen Koordinatensystems $\{0; \boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}\}$ betrachten und eine Gleichung für E aufstellen:

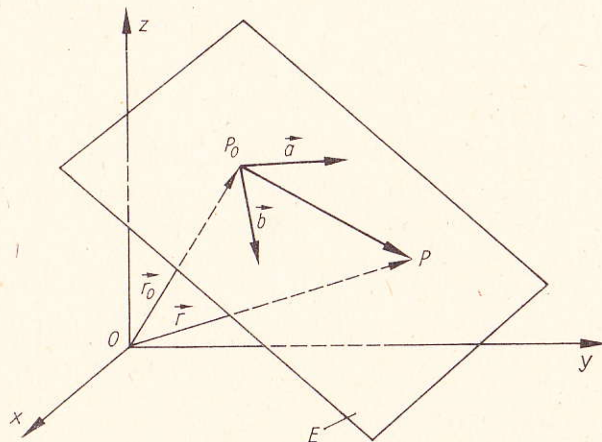


Abb. 65.3.

Man kann den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ eines beliebigen Punktes P der Ebene als Vektorsumme darstellen: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{P_0P}$

Wegen $\boldsymbol{P_0P} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ erhält man als Parametergleichung einer Ebene im Raum:

■ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u \cdot \boldsymbol{a} + v \cdot \boldsymbol{b}$ oder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \text{mit } u, v \in R.$$

Diese Vektorgleichung mit zwei Parametern kann man auch als ein lineares Gleichungssystem aus drei Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ua_x + vb_x \\ y &= y_0 + ua_y + vb_y \\ z &= z_0 + ua_z + vb_z \end{aligned}$$

Die Ebene ist zweidimensional, ihre Parametergleichung enthält zwei Parameter. Dagegen ist die Gerade eine eindimensionale Figur, und ihre Parametergleichung enthält genau einen Parameter.

Bevor wir einige Beispiele betrachten, wiederholen wir noch einmal:

■ Wenn man die Parametergleichung einer Ebene E aufstellen will, braucht man immer den Ortsvektor eines Punktes der Ebene und zwei nicht kollineare Richtungsvektoren der Ebene E.

Beispiele:

(1) gegeben: $A(2; -2; 1) \in E$
$B(4; 5; 2) \in E$
$C(-2; 1; 3) \in E$

gesucht: Parametergleichung der Ebene E

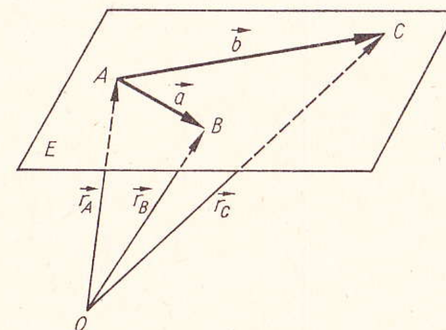


Abb. 65.4.

Lösung:

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{r}_A$ als Ortsvektor von $A \in E$ und $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ als nicht kollineare Richtungsvektoren der Ebene E.

$$\boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (2 + 2u - 4v)\,\boldsymbol{i} + (-2 + 7u + 3v)\,\boldsymbol{j} + (1 + u + 2v)\,\boldsymbol{k}$$

Anmerkung: Man erhält eine andere Parametergleichung für E, wenn man zur Aufstellung der Gleichung statt $\boldsymbol{r}_A$ den Ortsvektor eines anderen gegebenen Punktes der Ebene E wählt. Es gibt unendlich viele Parametergleichungen für ein und dieselbe Ebene E.

(2) gegeben: Gerade $g \subset E$ mit g:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$Q(-2; 3; 4) \in E \wedge Q \notin g$

gesucht: Parametergleichung der Ebene E

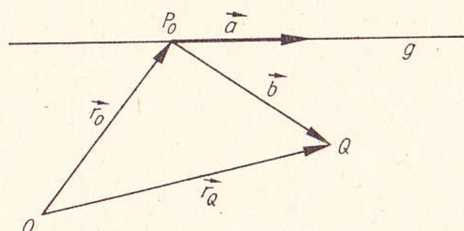


Abb. 65.5.

Lösung:
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{r}_0$ als Ortsvektor von $P_0 \in g \subset E$ und $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{P_0Q}$ als Richtungsvektoren von E.

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{P_0Q} \quad P_0 \in E \wedge Q \in E; \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}_Q - \boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

65.2. Parameterfreie Gleichungen einer Ebene

Wir hatten festgestellt, daß die Gleichung einer Ebene E im Raum aufgestellt werden kann, wenn ein Punkt $P_0 \in E$ und zwei Richtungsvektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bekannt sind. Eine Ebene E kann aber auch durch einen Punkt $P_0 \in E$ und einen Vektor $\boldsymbol{n}$, der senkrecht auf E steht, gegeben sein. Durch $P_0 \in E$ und $\boldsymbol{n} \perp E$ ist die Ebene eindeutig festgelegt. Man bezeichnet den Vektor $\boldsymbol{n}$ als einen Normalenvektor der Ebene E. (Statt die „Senkrechte" oder die „Orthogonale" wird in der mathematischen Literatur auch der Begriff die „Normale" verwendet.)
Mit Hilfe von $P_0 \in E$ und $\boldsymbol{n} \perp E$ kann man die parameterfreie Gleichung der Ebene E aufstellen. Wir werden zeigen, daß die Gleichung die Form $Ax + By + Cz + D = 0$ hat.
gegeben: $P_0(x_0; y_0; z_0) \in E$

$$\boldsymbol{n} = (n_x; n_y; n_z) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{n} \perp E$$

gesucht: Gleichung von E

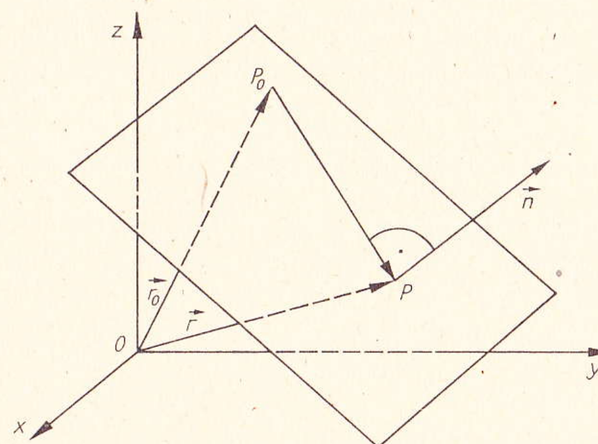


Abb. 65.6.

Aus der Zeichnung kann man ablesen:

1. $\forall P \in E$: $\boldsymbol{P_0P} \subset E$
2. $\boldsymbol{P_0P} \perp \boldsymbol{n}$

Weil $\boldsymbol{P_0P} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ ist und das Skalarprodukt von zwei orthogonalen Vektoren 0 ist, folgt:

■ $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ oder

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{n}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Wenn man die Gleichung in der Form

$$xn_x + yn_y + zn_z = x_0n_x + y_0n_y + z_0n_z$$

schreibt und dabei beachtet, daß n_x, n_y, n_z, x_0, y_0, z_0 bestimmte reelle Zahlen sind, erkennt man, daß das eine parameterfreie, lineare Gleichung in den Variablen x, y und z ist. Setzt man noch $n_x = A$, $n_y = B$, $n_z = C$ und $\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{n} = -D$, so erhält man für die Ebene E die Gleichung:

■ $$Ax + By + Cz + D = 0$$

Eine lineare Gleichung in drei Variablen stellt also eine *Ebene* dar. Umgekehrt kann man aus der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ einer Ebene E sofort ablesen, daß ein Normalenvektor der Ebene der Vektor $\boldsymbol{n} = (A; B; C)$ ist.
Jetzt können wir auch die parameterfreie Darstellung einer Geraden im Raum geometrisch interpretieren. Wir hatten gesehen, daß eine Gerade im Raum parameterfrei als ein lineares Gleichungssystem aus zwei linear unabhängigen Gleichungen in den Variablen x, y und z dargestellt werden kann. Zwei linear unabhängige Gleichungen in den Variablen x, y und z sind aber die analytische Darstellung von zwei Ebenen E_1 und E_2, die nicht zueinander parallel sind.
Zwei Ebenen E_1 und E_2 mit $E_1 \nparallel E_2$ bzw. die zwei parameterfreien Gleichungen dieser beiden Ebenen bestimmen immer eindeutig eine Gerade g im Raum.
Für g gilt in der geometrischen Darstellungsweise:

$g = E_1 \cap E_2$; $E_1 \nparallel E_2$
g ist die Menge aller gemeinsamen Punkte von E_1 und E_2
g ist die Schnittfigur von E_1 und E_2

Für g gilt in analytischer Darstellungsweise:

$$g\colon \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

g mit $g = E_1 \cap E_2$ ist die Menge aller Punkte $P(x; y; z)$, deren Koordinatentripel $(x; y; z)$ die Gleichungen der beiden Ebenen E_1 und E_2 erfüllen.

Beachten Sie, daß es unendlich viele Ebenen gibt, die sich in einer Geraden g des Raumes schneiden. Es gibt somit unendlich viele Paare nichtparalleler Ebenen bzw. unendlich viele lineare Gleichungssysteme aus zwei linear unabhängigen Gleichungen, die alle die gleiche Gerade g bestimmen. Unter diesen Gleichungssystemen gibt es solche, deren Gleichungen nur jeweils zwei der Variablen x, y, z enthalten.

Beispiel:

$$g\colon \begin{aligned} x + 23z - 38 &= 0 \ (E_1) \\ y - 14z + 23 &= 0 \ (E_2) \end{aligned}$$

Sie können sich überlegen, welche besondere Lage die Normalenvektoren $\boldsymbol{n}_1$ und $\boldsymbol{n}_2$ der Ebenen E_1 und E_2 in diesem Falle haben.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Durch wieviel Punkte im Raum ist eine Ebene bestimmt?
2. Wodurch ist eine Ebene auch bestimmt?
3. Warum gibt es bei der Parametergleichung der Ebene zwei Parameter?
4. Welche Erkenntnis ist für das Aufstellen einer Parametergleichung einer Ebene besonders wichtig?
5. Nennen Sie die Parametergleichung der Ebene! Welche Bedeutung haben die Variablen und Konstanten in der Gleichung?
6. Ist die Gleichung $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ eine Parametergleichung oder eine parameterfreie Gleichung der Ebene?
7. Welche Festlegungen muß man treffen, um aus der Gleichung $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ die Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ zu erhalten?
8. Wie liegen die Ebenen mit folgenden Gleichungen in einem Koordinatensystem $\{0; \boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}\}$?
   8.1. $y = 5$;
   8.2. $y = x$;
   8.3. $z = 0$;
   8.4. $x + y + z = 0$
9. Unter welcher Bedingung geht die Ebene mit der Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ durch den Koordinatenursprung?
10. Welche Bedeutung hat der Vektor $(A; B; C)$ für die Ebene mit $Ax + By + Cz + D = 0$?
11. Welche Möglichkeiten gibt es für die Darstellung einer Ebene im Raum?
12. Welche besondere Lage im Koordinatensystem $\{0; \boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}\}$ haben die Normalenvektoren der Ebenen?
    12.1. $E\colon\ 2x + 3z - 4 = 0$
    12.2. $E\colon\ y - z - 1 = 0$
    12.3. $E\colon\ x - y + 2 = 0$

Aufgaben

1. Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene auf, in der das Dreieck $P_1P_2P_3$ liegt!

1. $P_1(1; 0; 0)$; $P_2(0; 1; 0)$; $P_3(0; 0; 1)$
2. $P_1(-1; 3; 7)$; $P_2(-5; 4; 3)$; $P_3(6; -5; -4)$

2. Wie kann man einen Normalenvektor zur Ebene mit der Gleichung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ bestimmen?

3. Gegeben ist eine Ebene mit der Gleichung

$$\boldsymbol{r} = (1; 2; 3) + u(1; 1; 1) + v(0; 1; 2).$$

Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g, die senkrecht auf der Ebene E steht und durch $P_0(4; 5; 6)$ geht!

4. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $\boldsymbol{r} = (4t - 5)\boldsymbol{i} + (3t - 8)\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k}$ mit der Ebene $x - 2y + 5z + 3 = 0$!

5. Gegeben ist der Vektor $\boldsymbol{a} = (8; 6; 3)$.

1. Berechnen Sie die Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{b}$, für den gilt:
   a) Der Betrag dieses Vektors ist 5.
   b) Es sei $b_x > 0$ und $b_z = 0$.
   c) $\boldsymbol{b}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{a}$.
2. Stellen Sie eine Gleichung der durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Ebene auf, die durch $P_0(0; 0; 0)$ geht!
3. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die senkrecht auf der Ebene steht und durch P_0 geht!
4. Bestimmen Sie die parameterfreie Gleichung der Ebene aus 5.2.!

6. Welche Gleichung hat die Ebene, die durch $P_1(-2; 3; 4)$ geht und auf der die Gerade mit $\boldsymbol{r} = (1; 2; 3) + t(-1; -2; 5)$ senkrecht steht?

7. Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden g an, die durch $P_0(1; 2; -3)$ geht und die Ebene E mit $x - 3y + z - 2 = 0$ senkrecht durchstößt!

8. Bestimmen Sie die parameterfreie Gleichung der Ebene E mit

1. $\boldsymbol{r} = (1; -2; 2) + u(1; 2; -1) + v(2; -1; 1)$
2. $\boldsymbol{r} = (1; 2; 3) + u(1; 0; 0) + v(0; 1; 0)$

66. Kegelschnitte

Nach der analytischen Geometrie der Geraden sollen weitere Figuren untersucht werden, die für die Naturwissenschaften und die Technik von besonderer Bedeutung sind. Diese Figuren sind der Kreis und die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel. Man erhält sie, wenn man einen geraden Doppelkegel mit verschiedenen geneigten Ebenen schneidet.

Wenn der Kegel von einer Ebene ε geschnitten wird, so ergibt sich als Schnittfigur zwischen den Mantellinien des geraden Kreiskegels und der Schnittebene ε ein Kegelschnitt.

> ▶ **Def.:** Ein Kegelschnitt ist eine Schnittfigur, die entsteht, wenn ein gerader Kreiskegel von einer Ebene geschnitten wird.

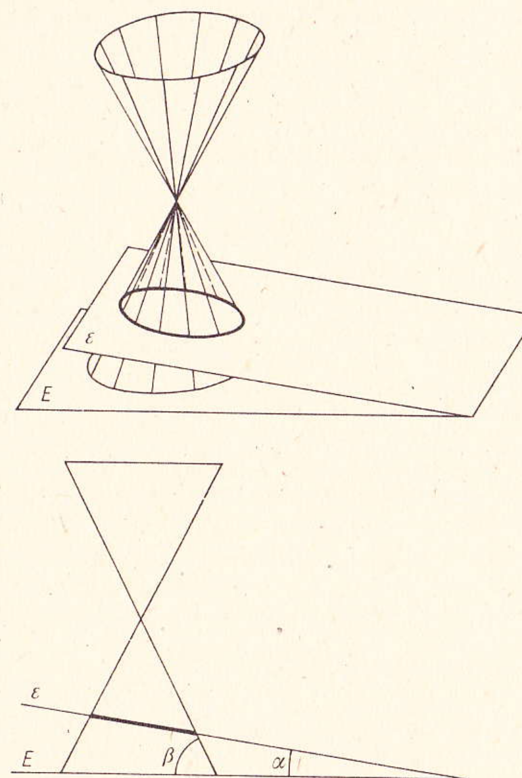


Abb. 66.1. Gerader Doppelkegel wird von Ebene E geschnitten

Um Ellipse, Hyperbel und Parabel definieren zu können, soll der Kreiskegel mit einer Grundkreisebene oder Grundebene E senkrecht zur Kegelachse geschnitten werden. Die Mantellinien dieses Kegels bilden mit der Grundebene einen Winkel $\beta < 90°$.
Weiterhin sei α der Winkel zwischen der Schnittebene ε und der Grundebene E. Die Art der Schnittfigur ist bei einem bestimmten Kegel von der Größe des Winkels α abhängig.

> ▶ **Def.:** Die {Ellipse / Parabel / Hyperbel} ist ein Kegelschnitt, bei der der Winkel zwischen der Schnittebene und der Grundebene {kleiner als der / gleich dem / größer als der} Winkel zwischen der Mantellinie des Kegels und der Grundebene ist.

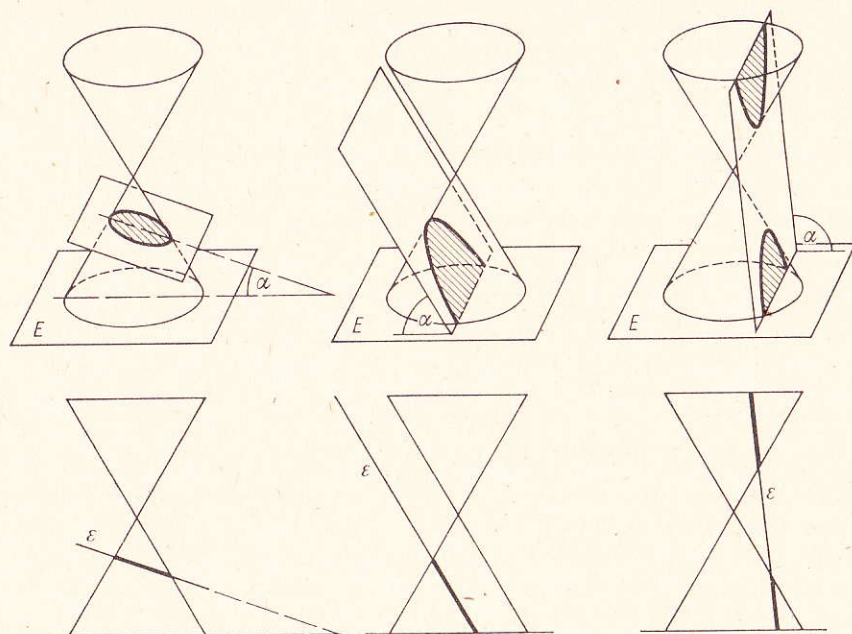


Abb. 66.2. Ellipse, Hyperbel, Parabel als Kegelschnitte

Die Schnittebene dieser Kegelschnitte geht bei der Erzeugung nicht durch die Spitze des Kegels. Man erkennt außerdem sofort, daß Kreise besondere Ellipsen sind, nämlich solche, bei denen $\alpha = 0°$ ist.
In den folgenden Texten werden Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel analytisch behandelt. Diese Figuren werden dazu noch einmal als Punktmengen einer Ebene definiert. Der belgische Mathematiker Dandelin (1794–1847) hat den Zusammenhang zwischen der Definition dieser Figuren als Kegelschnitte und ihrer Definition als Punktmengen der Ebene aufgedeckt. Wir werden auf diesen Zusammenhang nicht eingehen.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Was ist ein Kegelschnitt?
2. Wie ist die Ellipse als Kegelschnitt definiert?
3. Wie ist die Parabel als Kegelschnitt definiert?
4. Wie ist die Hyperbel als Kegelschnitt definiert?
5. Warum kann man den Kreis als einen Sonderfall der Ellipse bezeichnen?

67. Der Kreis

67.1. Definition

Man kann einen Kreis k als Punktmenge einer Ebene definieren.

▶ **Def.:** Ein Kreis k ist die Menge aller Punkte einer Ebene ε, die von einem Punkt $M \in \varepsilon$ den gleichen Abstand r haben. M ist der Mittelpunkt des Kreises und r sein Radius.

$$k = \{P \in \varepsilon \mid l(\overline{PM}) = r;\ M \in \varepsilon\}.$$

67.2. Gleichung eines Kreises in Mittelpunktslage

Wir betrachten zuerst Kreise, bei denen sich der Mittelpunkt M im Ursprung eines x-y-Koordinatensystems befindet. Von solchen Kreisen sagt man, daß sie sich in Mittelpunktslage befinden.

gegeben: $k(M(0; 0); r)$
gesucht: Gleichung des Kreises k

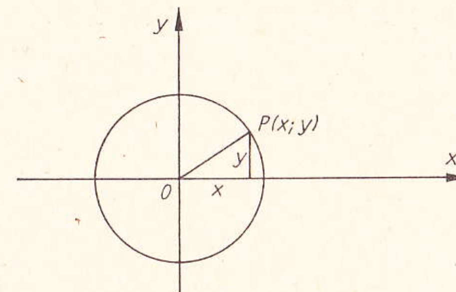


Abb. 67.1.

Wir wählen einen beliebigen Punkt $P(x; y)$ auf dem Kreis und suchen eine Beziehung zwischen den Koordinaten dieses Punktes und dem Kreisradius r. Aus der Zeichnung erkennt man sofort, daß die Gleichung eines Kreises k in Mittelpunktslage lautet:

■ $k(M(0; 0); r)\colon x^2 + y^2 = r^2$

Beispiel:

Ein Kreis in Mittelpunktslage gehe durch den Punkt $P_1(6; -7)$.
Wie lautet die Gleichung des Kreises?
gegeben: $k(M(0; 0);\ P_1(6; -7))$
gesucht: Gleichung von k

Lösung:
Ansatz: $x^2 + y^2 = r^2$

Man muß die Konstante $r > 0$ bestimmen. Weil $P_1 \in k$ ist, erfüllen die Koordinaten von P_1 die Gleichung von k. Also:

$$36 + 49 = r^2$$
$$85 = r^2$$
$$r = \sqrt{85}$$

Die gesuchte Gleichung des Kreises k ist $x^2 + y^2 = 85$.

67.3. Gleichung eines Kreises in allgemeiner Lage

Wir wollen jetzt die Gleichung eines Kreises k mit Radius r und Mittelpunkt $M(x_m; y_m)$ bestimmen.

gegeben: $k(M(x_m; y_m); r)$
gesucht: Kreisgleichung

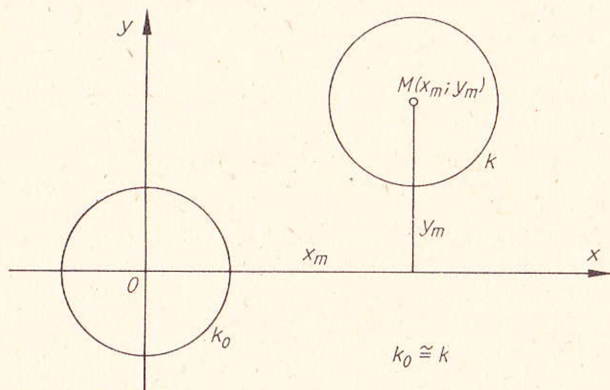


Abb. 67.2.

k geht aus k_0 durch Verschiebungen in Richtung der x-Achse und y-Achse hervor. Deshalb erhält man die Gleichung von k aus der Gleichung von k_0, indem man x durch $x - x_m$ und y durch $y - y_m$ ersetzt:

■ $k(M(x_m; y_m); r)$: $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$

Ein Kreis ist also durch die Angabe von Radius und Mittelpunktskoordinaten bestimmt.

Beispiel:

$k(M(-2; 5); r = 7)$: $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$

Auch durch 3 Punkte des Kreises ist ein Kreis bestimmt. Mit den Koordinaten dieser 3 Punkte kann man die Konstanten x_m, y_m und r bestimmen, indem man 3 Gleichungen aufstellt und das Gleichungssystem löst.

gegeben: $P_1(2; 0)$, $P_2(12; 0)$, $P_3(10; 4) \in k$
gesucht: Kreisgleichung

Lösung:

Ansatz: $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$
$P_1 \in k$: $(2 - x_m)^2 + (0 - y_m)^2 = r^2$
$P_2 \in k$: $(12 - x_m)^2 + (0 - y_m)^2 = r^2$
$P_3 \in k$: $(10 - x_m)^2 + (4 - y_m)^2 = r^2$

Man erhält $x_m = 7$; $y_m = 0$; $r = 5$. Die gesuchte Kreisgleichung ist $(x - 7)^2 + y^2 = 25$.

67.4. Kreis und Gerade

Wenn man feststellen will, welche Lage ein gegebener Kreis k und eine gegebene Gerade g zueinander haben, so untersucht man, wieviel gemeinsame Punkte diese beiden Figuren besitzen. Man muß also das zugehörige Gleichungssystem lösen.

k: $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$
g: $y = mx + b$

■ Als Lösungen können sich **3 Fälle** ergeben:
Keine reelle Lösung: Gerade und Kreis haben keinen gemeinsamen Punkt. Die Gerade verfehlt den Kreis.
Eine reelle Doppellösung: Die Gerade berührt den Kreis in genau einem Punkt. Die Gerade ist Tangente an den Kreis.
Zwei verschiedene reelle Lösungen: Die Gerade schneidet den Kreis in 2 Punkten. Die Gerade ist eine Sekante des Kreises.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Ist ein Kreis eindeutig bestimmt durch die Angabe
   1. des Mittelpunktes und des Radius,
   2. eines Punktes des Kreises und des Mittelpunktes,
   3. eines Punktes des Kreises und des Radius,
   4. dreier Punkte des Kreises,
   5. zweier Punkte des Kreises?
2. Unter welcher Bedingung liegt ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ auf dem Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$?
3. Wie lautet die Gleichung eines Kreises in allgemeiner Lage und in Mittelpunktslage?
4. Welche Lage können ein Kreis und eine Gerade zueinander haben?

Aufgaben

1. Definieren Sie!
Kreis
► Ein Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene E, die von einem Punkt $M \in E$ den gleichen Abstand r haben.

1. Kugel
2. Tangente eines Kreises
3. Winkelhalbierende eines Winkels
4. Sekante eines Kreises
5. Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$

2. Wie lautet die Gleichung einer Kugel mit Radius r in Mittelpunktslage?

3. Es ist die Gleichung des Kreises mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M zu bestimmen.
1. $M(0; 0)$; $r = 4$
2. $M(0; 0)$; $r = 3$
3. $M(-2; 1)$; $r = 3$

4. Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen, der den Mittelpunkt $M(r; 0)$ und den Radius r hat. Welche Lage hat dieser Kreis?

5. Es ist die Gleichung des Kreises mit dem Radius r aufzustellen, der den positiven Teil der x-Achse und den positiven Teil der y-Achse berührt.

6. Es ist die Gleichung des Kreises aufzustellen, dessen Radius r ist und dessen Mittelpunkt auf dem positiven Teil der y-Achse liegt und der die x-Achse als Tangente hat.

7. Stellen Sie die Gleichung des Kreises auf, der durch die Punkte $P_1(-3; 0)$, $P_2(-1; -2)$ und $P_3(-3; -4)$ geht!

8. Welche Lage haben der Kreis $x^2 + y^2 = 25$ und die Gerade $y = -0{,}75x + 6{,}25$?

9. In welchen Punkten schneiden die Kreise $k_1: x^2 + y^2 + 3x - 2y - 17 = 0$ und $k_2: x^2 + y^2 + x - y - 12 = 0$ einander?

10. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den gegebenen Kreis im Punkte P_0! Wenden Sie dabei die implizite Differentiation an!
1. $x^2 + y^2 = 25$; $P_0(3; 4)$
2. $x^2 + y^2 - 14x - 4y = 5$; $P_0(10; y_0 < 0)$
3. $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 113$; $P_0(x_0 > 0; -1)$

11. Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen einer Kugel mit dem Radius r!
Anleitung: Betrachten Sie die Kugel als Rotationskörper, der bei Rotation eines Halbkreises entsteht!

12. Berechnen Sie mit Hilfe der Integralrechnung den Flächeninhalt des Kreises mit Radius a!
Anleitung: Benutzen Sie die Substitution $x = a \cdot \sin z$, und beachten Sie, daß die Umkehrabbildung von $x = a \cdot \sin z$ die Gleichung $z = \arcsin \frac{x}{a}$ hat!

68. Die Parabel

68.1. Definition

► **Def.:** Eine Parabel ist die Menge aller Punkte einer Ebene ε, die von einem festen Punkt $F \in \varepsilon$, dem Brennpunkt der Parabel, und von einer festen Geraden $l \subset \varepsilon$, der Leitlinie der Parabel, den gleichen Abstand haben.

Bezeichnet man die Parabel mit P_a, ihre Punkte mit P und den Abstand des Punktes P von der Leitlinie l mit $a(P; l)$, so kann man schreiben:

$$P_a = \{P \in \varepsilon \mid l(\overline{PF}) = a(P; l)\}.$$

Entsprechend dieser Definition konstruiert man bei gegebener Leitlinie l und gegebenem Brennpunkt F einzelne Parabelpunkte in folgenden Schritten:

1. Man zeichnet einen Kreis um F mit einem Radius r und eine Parallele zu l im Abstand r.
2. Kreis und Parallele schneiden einander in Parabelpunkten. Bei Veränderung des Kreisradius bzw. des Abstandes zu l erhält man weitere Parabelpunkte, wobei r größer oder gleich der Hälfte des Abstandes des Brennpunktes von der Leitlinie sein muß.

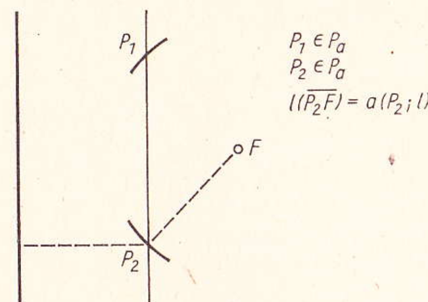


Abb. 68.1. Konstruktion von zwei Parabelpunkten

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

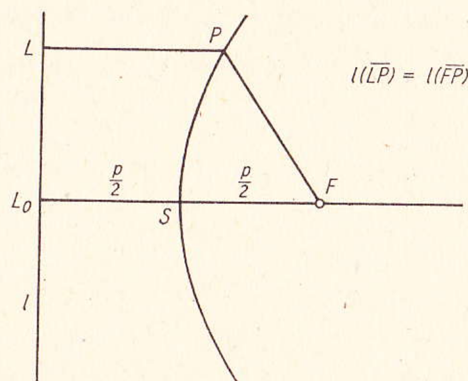


Abb. 68.2.

1. Für eine Parabel ist der Abstand des Brennpunktes F von der Leitlinie l eine charakteristische Größe. Wir bezeichnen diesen Abstand $l(\overline{FL_0})$ mit p. Durch p ist eine Parabel eindeutig bestimmt.
2. Die Senkrechte auf l durch F heißt Parabelachse. Sie ist die Symmetrieachse der Parabel.
3. Der Parabelpunkt S, für den $l(\overline{SF}) = l(\overline{SL_0}) = \frac{p}{2}$ gilt, heißt Scheitelpunkt bzw. Scheitel der Parabel.

68.2. Gleichung einer Parabel in achsenparalleler Scheitellage

Wenn sich der Scheitelpunkt der Parabel im Koordinatenursprung befindet und die Parabelachse mit einer Koordinatenachse zusammenfällt, so spricht man von einer Parabel in achsenparalleler Scheitellage. Wir betrachten zuerst eine Parabel P_a in Scheitellage, die nach rechts geöffnet ist.

gegeben: $P_a(S(0;\, 0);\, p)$
gesucht: Gleichung der Parabel

Lösung: Nach Definition gilt:

$$l(\overline{PF}) = l(\overline{PL})$$

Wir suchen eine Beziehung zwischen den Koordinaten des beliebigen Punktes P der Parabel und der gegebenen Größe p:

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

Wir formen den Ausdruck noch um, damit wir eine einprägsame Form erhalten:

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

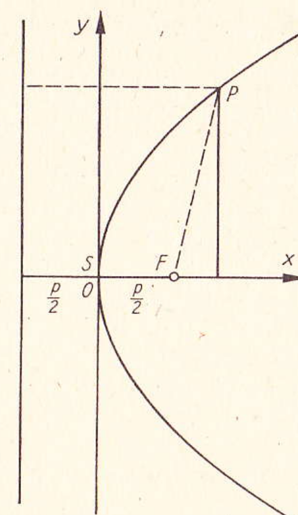


Abb. 68.3.

Wir sehen auch an der Gleichung, daß für die Parabel die Größe p charakteristisch ist. Man nennt $2p$ den Parameter der Parabel. Entsprechend heißt p der Halbparameter der Parabel.

Wir betrachten nun Parabeln, die nach links, oben oder unten geöffnet und in Scheitellage sind.

Gleichung einer Parabel, die nach **links** geöffnet ist:
Eine solche Parabel entsteht aus der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ durch Spiegelung an der y-Achse. Ihre Gleichung erhält man, indem man in $y^2 = 2px$ die Variable x durch $-x$ ersetzt: $y^2 = 2p(-x)$

$$y^2 = -2px$$

Gleichung einer Parabel, die nach **oben** geöffnet ist:
Eine solche Parabel entsteht aus der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ durch Spiegelung an der Geraden $y = x$. Ihre Gleichung erhält man, indem man in $y^2 = 2px$ die Variablen x und y vertauscht:

$$x^2 = 2py$$

Gleichung einer Parabel, die nach **unten** geöffnet ist:
Eine solche Parabel entsteht aus der Parabel mit der Gleichung $x^2 = 2py$ durch Spiegelung an der x-Achse. Ihre Gleichung erhält man, indem man in $x^2 = 2py$ die Variable y durch $-y$ ersetzt:

$$x^2 = -2py$$

Beispiel:

Wie lautet die Gleichung einer Parabel in Scheitellage, die nach unten geöffnet ist und durch den Punkt $P_1(2;\, -8)$ geht?
Ansatz: $x^2 = -2py$

$P_1(2;\, -8) \in P_a$: $2^2 = -2p(-8)$
$4 = 16p$
$p = \frac{1}{4}$

Die Gleichung der gesuchten Parabel ist $x^2 = -\frac{1}{2}y$.

68.3. Gleichung einer Parabel in achsenparalleler Lage

Wenn der Scheitelpunkt S der Parabel die Koordinaten x_s und y_s hat und die Parabelachse parallel zu einer Koordinatenachse ist, so spricht man von der Parabel in achsenparalleler Lage. Aus den Gleichungen der Parabel in Scheitellage erhält man die Gleichungen für Parabeln in achsenparalleler Lage mit dem Scheitelpunkt $S(x_s;\ y_s)$:

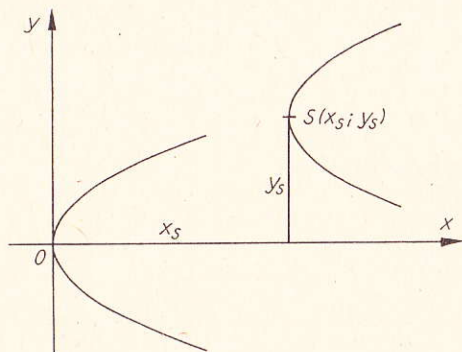


Abb. 68.4. Verschobene Parabel, nach rechts geöffnet

- Parabel, nach rechts geöffnet: $(y - y_s)^2 = 2p(x - x_s)$
  Parabel, nach links geöffnet: $(y - y_s)^2 = -2p(x - x_s)$
  Parabel, nach oben geöffnet: $(x - x_s)^2 = 2p(y - y_s)$
  Parabel, nach unten geöffnet: $(x - x_s)^2 = -2p(y - y_s)$.

Wir wollen an zwei Aufgaben die Anwendung dieser Erkenntnisse in der Praxis und ihre Verbindung mit anderen Gebieten der Mathematik zeigen.

Aufgabe:

- Ein parabolischer Brückenbogen hat die Spannweite $l = 32$ m und die Pfeilhöhe $h = 6$ m. In Abständen von je 4 m sind Vertikalstäbe angebracht. Man berechne deren Länge.

Lösungsweg:

1. Wahl des Koordinatensystems bezüglich der Parabel P_a,
2. Gleichung der Parabel aufstellen,
3. Stablänge mit Hilfe der Parabelgleichung berechnen.

Erster Lösungsansatz:

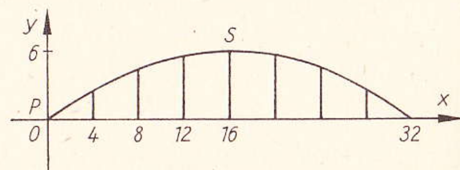


Abb. 68.5.

Achsenparallele Lage von P_a

gegeben: $S(16;\ 6) \in P_a$ $P_0(0;\ 0) \in P_a$ gesucht: Parabelgleichung

Ansatz: P_a: $(x - x_s)^2 = -2p(y - y_s)$

$S(16;\ 6) \in P_a$: $(x - 16)^2 = -2p(y - 6)$

$P_0(0;\ 0) \in P_a$: $(0 - 16)^2 = -2p(0 - 6)$

$$256 = 12p$$

$$p = \frac{64}{3}$$

Parabelgleichung: $(x - 16)^2 = -\frac{128}{3}(y - 6)$

Kürzester Stab: $y_1 = f(x_1) = f(4)$

$$(4 - 16)^2 = -\frac{128}{3}(y_1 - 6)$$

$$y_1 = 2{,}625$$

Zweiter Stab: $y_2 = f(8)$

$$(8 - 16)^2 = -\frac{128}{3}(y_2 - 6)$$

$$y_2 = 4{,}500$$

Dritter Stab: $y_3 = f(12)$

$$y_3 = 5{,}625$$

Der mittlere Vertikalstab ist 6 m lang, die anderen 5,625 m, 4,500 m und 2,625 m.

Zweiter Lösungsansatz:

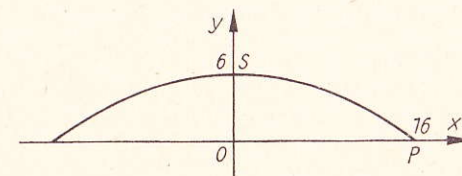


Abb. 68.6.

Achsenparallele Lage von P_a

gegeben: $S(0;\ 6) \in P_a$ gesucht: Parabelgleichung
$P(16;\ 0) \in P_a$

Ansatz: P_a: $(x - x_s)^2 = -2p(y - y_s)$

$S(0;\ 6) \in P_a$: $(x - 0)^2 = -2p(y - 6)$

$P(16;\ 0) \in P_a$: $(16 - 0)^2 = -2p(0 - 6)$

$$256 = 12p$$

$$p = \frac{64}{3}$$

Parabelgleichung: $x^2 = -\frac{128}{3}(y - 6)$

Kürzester Stab: $y_1 = f(x_1) = f(12)$

$$144 = -\frac{128}{3}(y_1 - 6)$$

$$y_1 = 2{,}625$$

Entsprechend berechnet man die anderen Stäbe.

Dritter Lösungsansatz:

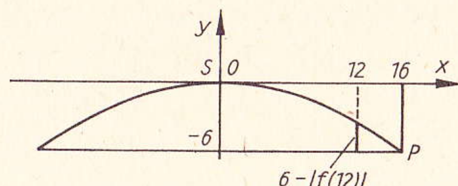


Abb. 68.7.

Scheitellage von P_a
Kürzester Stab: $6 - |f(12)|$
gegeben: $P(16; -6) \in P_a$ gesucht: Parabelgleichung
Ansatz: P_a: $x^2 = -2py$

$$P(16; -6) \in P_a : 256 = 12p$$

$$p = \frac{64}{3}$$

Parabelgleichung: $x^2 = -\frac{128}{3}y$

Kürzester Stab: $y_1 = f(12)$:

$$144 = -\frac{128}{3}y_1$$

$$y_1 = \frac{-27}{8} = -3{,}375$$

Stablänge: $6 - |-3{,}375| = 6 - 3{,}375$
$= 2{,}625$

Entsprechend berechnet man die anderen Stäbe.

Aufgabe:

Beweisen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung!
Wenn zwei Parabeln die Achse und den Brennpunkt, der zwischen ihren Scheiteln liegt, gemeinsam haben, so sind die Tangenten in den Schnittpunkten beider Kurven zueinander orthogonal.

O. B. d. A. haben wir das Koordinatensystem so gewählt, daß sein Ursprung mit dem Brennpunkt und die x-Achse mit der Parabelachse zusammenfallen.

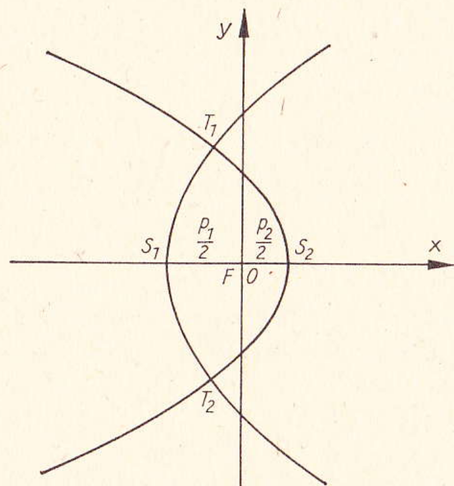


Abb. 68.8.

Lösungsweg:

1. Aufstellen der beiden Parabelgleichungen,
2. Schnittpunkte bestimmen,
3. Anstiege in den Schnittpunkten bestimmen,
4. Nachweis, daß $m_1 \cdot m_2 = -1$ ist.

zu 1.

Ansatz für P_{a1}: $(y - y_s)^2 = 2p_1(x - x_s)$

$$S_1\left(\frac{-p_1}{2}; 0\right) \in P_{a1}: y^2 = 2p_1\left(x + \frac{p_1}{2}\right)$$

Ansatz für P_{a2}: $(y - y_s)^2 = -2p_2(x - x_s)$

$$S_2\left(\frac{p_2}{2}; 0\right) \in P_{a2}: y^2 = -2p_2\left(x - \frac{p_2}{2}\right)$$

zu 2.

Der Schnittpunkt sei $T(x_t; y_t)$.

$$2p_1\left(x_t + \frac{p_1}{2}\right) = -2p_2\left(x_t - \frac{p_2}{2}\right)$$

$$2p_1x_t + p_1^2 = -2p_2x_t + p_2^2$$

$$2x_t(p_1 + p_2) = p_2^2 - p_1^2$$

$$y_t = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2(p_1 + p_2)} = \frac{p_2 - p_1}{2}$$

$$y_t^2 = 2p_1\left(\frac{p_2 - p_1}{2} + \frac{p_1}{2}\right)$$

$$y_t^2 = p_1p_2 \quad |y_t| = \sqrt{p_1p_2} \quad y_{t1} = \sqrt{p_1p_2} \quad y_{t2} = -\sqrt{p_1p_2}$$

$$T_1\left(\frac{p_2 - p_1}{2}; \sqrt{p_1p_2}\right) \quad T_2\left(\frac{p_2 - p_1}{2}; -\sqrt{p_1p_2}\right)$$

zu 3.

O. B. d. A. untersuchen wir den Schnittpunkt T_1.

Ableitung der 1. Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2p_1\left(x + \frac{p_1}{2}\right)$:

$$2yy' = 2p_1 \quad y' = \frac{p_1}{y} \quad y'(T_1) = \frac{p_1}{\sqrt{p_1p_2}} = \frac{\sqrt{p_1p_2}}{p_2} = m_1$$

Ableitung der 2. Parabel mit der Gleichung $y^2 = -2p_2\left(x - \frac{p_2}{2}\right)$:

$$2yy' = -2p_2 \quad y' = -\frac{p_2}{y} \quad y'(T_1) = -\frac{\sqrt{p_1p_2}}{p_1} = m_2$$

zu 4.

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{\sqrt{p_1p_2}}{p_2}\left(-\frac{\sqrt{p_1p_2}}{p_1}\right) = -\frac{p_1p_2}{p_1p_2} = -1$$

w. z. b. w.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie ist die Parabel definiert?
2. Welche Größe ist für eine Parabel charakteristisch?
3. Wie lautet die Gleichung einer nach rechts, oben, links oder unten geöffneten Parabel in Scheitellage?
4. Wie lauten die Gleichungen der Parabeln entsprechend 3. in achsenparalleler Lage?
5. Eine Parabel habe den Scheitelpunkt $S(c;\,d)$ und den Parameter $2p$. Welche Koordinaten hat ihr Brennpunkt, wenn sie
   1. nach rechts,
   2. nach oben,
   3. nach links,
   4. nach unten geöffnet ist?
6. Für welche Werte von x und welche Werte von y gibt es Parabelpunkte?
   1. $y^2 = 2px$
   2. $(y - d)^2 = 2p(x - c)$
   3. $y^2 = -2px$
   4. $(x - c)^2 = -2p(y - d)$
7. Wieviel Konstante enthält die Gleichung $y^2 = 2px$? Durch wieviel Parabelpunkte ist also eine Parabel in Scheitellage nach rechts geöffnet eindeutig bestimmt?
8. Durch wieviel Parabelpunkte ist eine Parabel in achsenparalleler Lage mit der Parabelachse parallel zur x-Achse eindeutig bestimmt?
9. Ist eine Parabel in achsenparalleler Lage durch folgende Angaben eindeutig bestimmt?
   1. Scheitelpunkt und Parameter
   2. Scheitelpunkt, Parameter, Parabelachse
   3. Scheitelpunkt, Parameter, Parabelachse, Orientierung der Parabelachse
   4. zwei Parabelpunkte
   5. drei Parabelpunkte
   6. Scheitelpunkt, ein Parabelpunkt
   7. Parameter, ein Parabelpunkt
   8. Parameter, zwei Parabelpunkte.

Aufgaben

1. Stellen Sie die Gleichung der Parabel auf, deren Scheitel im Koordinatenursprung liegt und für die bekannt ist:
   1. sie liegt in der rechten Halbebene und $p = 3$,
   2. sie liegt in der linken Halbebene und $p = 0{,}5$,
   3. sie liegt in der unteren Halbebene und $p = 1$!

2. Stellen Sie die Gleichung der Parabel auf, die durch den Ursprung geht, den Brennpunkt $F(0;\,-3)$ hat und symmetrisch bezüglich einer Koordinatenachse ist!

3. Welche Koordinaten haben Scheitelpunkt und Brennpunkt der Parabeln?
   1. $y^2 = 6x$
   2. $(y - 3)^2 = 9(x - 1)$
   3. $y^2 = -5x$
   4. $(x - 4)^2 = -y$.

4. Weisen Sie nach, daß die zur Parabelachse senkrechte Parabelsehne durch den Brennpunkt F die Länge $2p$ hat!

5. Der Bogen einer Brücke ist ein Parabelbogen von der Spannweite $l = 20$ m und der Pfeilhöhe $h = 4$ m. 1 m über dem Scheitelpunkt läuft eine waagerechte Straße. Wie hoch liegt die Straße über dem Parabelbogen 5 m rechts oder links von der Mitte entfernt?

6. Der Hohlspiegel eines Scheinwerfers ist ein Rotationsparaboloid (der Querschnitt des Scheinwerfers ist eine Parabel). Der Spiegel hat einen Durchmesser von 80 cm und eine Tiefe von 10 cm. In welcher Entfernung vom Scheitelpunkt muß man eine Lichtquelle befestigen, damit die Lichtstrahlen parallel zur Spiegelachse (Parabelachse) reflektiert werden?

7. Eine nach oben geöffnete Parabel hat den Parameter $2p = 2$ und den Scheitelpunkt $S(0;\,2)$. Wie groß ist die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im Intervall von $x = -2$ bis $x = 4$?

69. Die Ellipse

69.1. Definition

Ein Gärtner will ein ellipsenförmiges Beet anlegen. Dazu steckt er in den Punkten F_1 und F_2 zwei Stäbe in die Erde und befestigt an diesen Stäben die Enden eines Fadens, der länger als der Abstand der Stäbe ist.

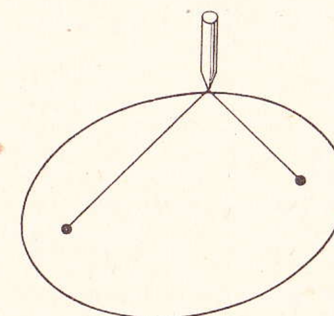


Abb. 69.1.

Mit einem dritten Stab bei P spannt er den Faden und bewegt diesen dritten Stab um F_1 und F_2 herum. Dabei entsteht eine Ellipse
Diese Ellipsenkonstruktion entspricht der folgenden Definition.

> **Def.:** Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte einer Ebene ε, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten $F_1 \in \varepsilon$ und $F_2 \in \varepsilon$ konstant (und größer als der Abstand $l(\overline{F_1F_2})$ der Punkte F_1 und F_2) ist.
> Bezeichnet man die Ellipse mit E und ihre Punkte mit P, so kann man schreiben:
> $$E = \{P \in \varepsilon \mid l(\overline{F_1P}) + l(\overline{PF_2}) = \text{const} > l(\overline{F_1F_2})\}$$

Die festen Punkte F_1 und F_2 sind die Brennpunkte der Ellipse. Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{F_1F_2}$ ist auch der Mittelpunkt der Ellipse.

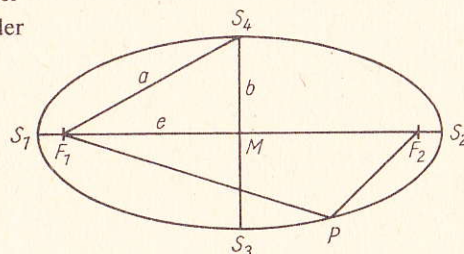


Abb. 69.2.

■ Die Größe $e = l(\overline{MF_1}) = l(\overline{MF_2})$ heißt lineare Exzentrizität der Ellipse. Sie ist eine der beiden charakteristischen Größen der Ellipse.

Auf den Symmetrieachsen der Ellipse liegen die Scheitel der Ellipse. S_1 und S_2 heißen Hauptscheitel der Ellipse. S_3 und S_4 nennt man Nebenscheitel der Ellipse. Die Hauptscheitel einer Ellipse haben im Vergleich zu allen anderen Ellipsenpunkten den größten Abstand vom Mittelpunkt M der Ellipse. Die Verbindungsstrecke $\overline{S_1S_2}$ der Hauptscheitel bezeichnet man als Hauptachse der Ellipse. Die Verbindungsstrecke $\overline{S_3S_4}$ der Nebenscheitel ist die Nebenachse der Ellipse. Der Ellipsenmittelpunkt M zerlegt die Haupt- und die Nebenachse in große und kleine Halbachsen. a ist die Länge einer großen Halbachse und b die Länge einer kleinen Halbachse. Somit haben die Haupt- bzw. die Nebenachse die Längen $2a$ bzw. $2b$.
Die Länge $2a$ der großen Hauptachse ist gleich der konstanten Abstandssumme $l(\overline{F_1P}) + l(\overline{PF_2})$, die für eine Ellipse charakteristisch ist.

$$l(\overline{F_1P}) + l(\overline{PF_2}) = 2a$$

Zum Beispiel gilt für den Scheitelpunkt S_2 als einen der Ellipsenpunkte entsprechend der Definition:

$$l(\overline{F_1S_2}) + l(\overline{S_2F_2}) = l(\overline{F_1S_2}) + l(\overline{S_1F_1}) = l(\overline{S_1S_2}) = 2a$$

Entsprechend der Ellipsendefinition gilt auch:

$$l(\overline{F_1S_4}) + l(\overline{S_4F_2}) = 2a, \quad \text{also} \quad l(\overline{F_1S_4}) = a.$$

Zwischen a, b und e gilt folgende Relation:

■ $a^2 = e^2 + b^2$

Wir können zusammenfassen:

■ Eine Ellipse E ist durch die Größen e und a eindeutig bestimmt, und es gilt:

$$E(e, a) = \{P \in \varepsilon \mid l(\overline{F_1P}) + l(\overline{PF_2}) = 2a > 2e;\ F_1, F_2 \in \varepsilon \wedge l(\overline{F_1F_2}) = 2e\}$$

Auf der Grundlage der Definition kann man eine Ellipse, für die a und e gegeben sind, punktweise konstruieren, wie die Abbildung zeigt. Man teilt die Strecke mit der Länge $2a$ innerlich und erhält die Radien r_1 und r_2, mit denen man Kreise um F_1 und F_2 schlägt. Die Kreise schneiden einander im allgemeinen in 4 Punkten. Weitere Ellipsenpunkte erhält man, wenn man in gleicher Weise verfährt, aber von anderen Teilungen der Strecke mit der Länge $2a$ ausgeht.

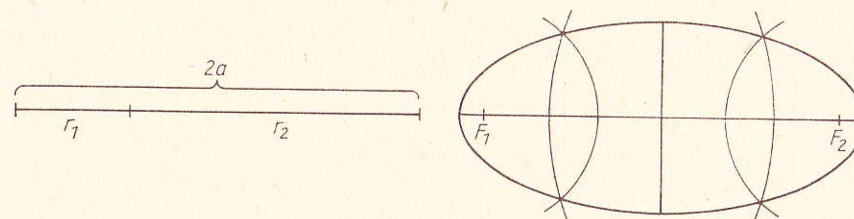


Abb. 69.3. Konstruktion von Ellipsenpunkten

69.2. Gleichung einer Ellipse in achsenparalleler Mittelpunktslage

Wenn sich der Mittelpunkt einer Ellipse im Koordinatenursprung befindet und die Ellipsenachsen auf den Koordinatenachsen liegen, so spricht man von der Ellipse in (achsenparalleler) Mittelpunktslage. Wir wollen die Gleichung einer solchen Ellipse bestimmen.

gegeben: $E(M(0; 0); a; e)$
gesucht: Ellipsengleichung

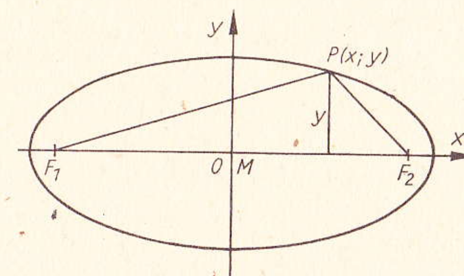


Abb. 69.4.

Nach Definition gilt: $l(\overline{F_1P}) + l(\overline{PF_2}) = 2a$.
Unter Verwendung der Koordinaten des beliebigen Ellipsenpunktes $P(x; y)$ ergibt sich:

$$\sqrt{(e + x)^2 + y^2} + \sqrt{(e - x)^2 + y^2} = 2a.$$

Wenn man diese Gleichung umformt und dabei e mit Hilfe der Beziehung $e^2 = a^2 - b^2$ eliminiert, erhält man die folgende Gleichung für E:

■ $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Beispiel:

gegeben: $E(M(0;\,0);\ a = 5;\ P_1(4;\,-1{,}8))$
gesucht: Ellipsengleichung

Ansatz: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^3} = 1$

$P_1 \in E$: $\frac{16}{25} + \frac{3{,}24}{b^2} = 1$ $\qquad b = 3$

Die gesuchte Ellipsengleichung ist $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

69.3. Gleichung einer Ellipse in achsenparalleler Lage

Wir wollen die Gleichung einer Ellipse in achsenparalleler Lage mit den Mittelpunktskoordinaten x_m und y_m und mit den Halbachsenlängen a und b bestimmen.

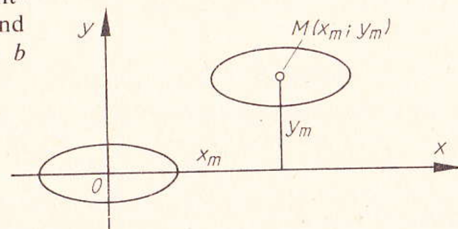


Abb. 69.5. Verschobene Ellipse

Die Gleichung einer Ellipse in achsenparalleler Lage geht aus der Gleichung einer Ellipse in Mittelpunktslage hervor, indem man x durch $x - x_m$ und y durch $y - y_m$ ersetzt.

■ $$\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$$

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie ist die Ellipse definiert?
2. Durch welche Größen ist eine Ellipse eindeutig bestimmt?
3. Welche geometrische Bedeutung haben a, b und e für eine Ellipse?
4. Welche Relation besteht zwischen a, b und e?
5. Wie kann man eine Ellipse punktweise konstruieren?
6. Wie lautet die Definitionsgleichung der Ellipse?

7. In welchen Schritten bestimmt man die Gleichung einer Ellipse in Mittelpunktslage?
8. Wie lautet die Gleichung einer Ellipse in Mittelpunktslage?
9. Wie erhält man aus der Gleichung der Ellipse in Mittelpunktslage die Gleichung einer Ellipse in achsenparalleler Lage?
10. Wie lautet die Gleichung einer Ellipse in achsenparalleler Lage mit den Halbachsenlängen a und b?
11. Ist in der Definition einer Ellipse der Kreis als Sonderfall enthalten? Begründen Sie Ihre Antwort!
12. Wie ändert sich die Form einer Ellipse, wenn bei gleichbleibendem a die lineare Exzentrizität e gegen 0 geht? Was erhält man im Grenzfalle $e = 0$?
13. Können bei einer Ellipse mit den Achsenlängen $2a$ und $2b$
    1. $a < e$ sein?
    2. $b < e$ sein?

Aufgaben

1. Bei einer Ellipse in Mittelpunktslage mit der linearen Exzentrizität e und den Halbachsenlängen a und b liegen die Brennpunkte auf der y-Achse. Welche Koordinaten haben die Brennpunkte, die Haupt- und die Nebenscheitel?

2. Für welche x-Werte sind durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$$

y-Werte definiert?
In welchen Intervallen liegen die y-Werte?

3. Stellen Sie die Gleichung einer Ellipse in achsenparalleler Lage auf, für die gilt:

1. $a = 10;\ b = 6;\ M(0;\,0)$
2. $a = 5;\ e = 3;\ M(0;\,0)$
3. $b = 3;\ F_1(-2;\,0);\ F_2(2;\,0)$
4. $a + b = 16;\ e = 8;\ M(0;\,0)$
5. $a = 7;\ b = 5;\ M(-4;\,9)$
6. $b = 3;\ F_1(-2;\,2);\ F_2(2;\,2)$
7. $a = 7;\ F_1(1;\,-4);\ F_2(1;\,2)$
8. $a = 13;\ b = 5;\ F_1(0;\,-3)$.

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks, dessen Eckpunkte mit den Brennpunkten und den Nebenscheiteln der Ellipse $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ zusammenfallen!

5. In die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist ein Quadrat einbeschrieben. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Quadrats!

6. Welche Gleichung hat eine Ellipse in achsenparalleler Lage, wenn
1. ein Hauptscheitel,
2. ein Brennpunkt
im Koordinatenursprung liegt?

7. Gegeben sei eine Ellipse in Mittelpunktslage durch die Punkte $P_1(4; 2)$ und $P_2(1; 4)$. Wie heißt die Gleichung der Ellipse?

8. Eine Ellipse in achsenparalleler Lage berührt die x-Achse im Punkt $P_1(8; 0)$ und die y-Achse in $P_2(0; -5)$. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ellipse!

9. Ein Fußballstadion hat die Form einer Ellipse von 200 m Länge und 100 m Breite. Das Fußballfeld ist 110 m lang und 60 m breit. Wie weit ist ein Zuschauer Z von der Tormitte T entfernt, wenn er auf der letzten Reihe in Verlängerung der Torauslinie sitzt?

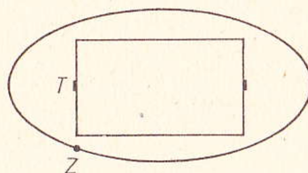


Abb. 69.6.

10. Wie groß ist das Volumen eines Rotationsellipsoids, das ensteht, wenn eine Ellipse mit den Achsenlängen $2a$ und $2b$
1. um die x-Achse,
2. um die y-Achse rotiert?

11. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Ellipse mit $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ im Punkte $B(e; y_B > 0)$!
(e ist die lineare Exzentrizität).

70. Die Hyperbel

70.1. Definition

▶ **Def.:** Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte einer Ebene ε, für die der Absolutbetrag der Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten $F_1 \in \varepsilon$ und $F_2 \in \varepsilon$ konstant (und kleiner als der Abstand $l(\overline{F_1F_2})$ der Punkte F_1 und F_2) ist. Bezeichnet man die Hyperbel mit H und ihre Punkte mit P, so kann man schreiben:

$$H = \{P \in \varepsilon |\ |l(\overline{F_1P}) - l(\overline{PF_2})| = \text{const} < l(\overline{F_1F_2})\}$$

Die festen Punkte F_1 und F_2 sind die Brennpunkte der Hyperbel. Den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{F_1F_2}$ bezeichnet man auch als Mittelpunkt der Hyperbel. Die Größe $e = l(\overline{MF_1}) = l(\overline{MF_2})$ heißt lineare Exzentrizität der Hyperbel.

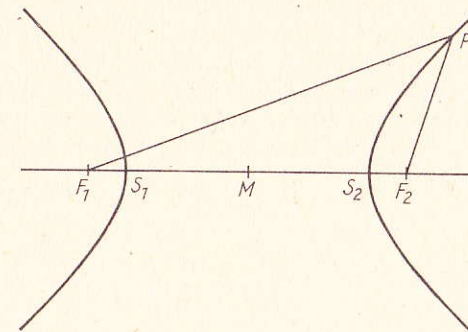


Abb. 70.1.

Jede Hyperbel besteht aus 2 getrennt liegenden Kurvenbögen (Kurvenästen) und ist zentralsymmetrisch bezüglich ihres Mittelpunktes. Jede Hyperbel ist auch axialsymmetrisch. Ihre Symmetrieachsen stehen aufeinander senkrecht und schneiden einander im Mittelpunkt M der Hyperbel.
Im Gegensatz zur Ellipse hat die Hyperbel nur zwei Scheitelpunkte S_1 und S_2, die auf einer der beiden Symmetrieachsen der Hyperbel liegen. Bezeichnet man den Abstand $l(\overline{S_1S_2})$ der Scheitelpunkte mit $2a$, so gilt für jeden Punkt P der Hyperbel:

$$|l(\overline{F_1P}) - l(\overline{PF_2})| = 2a$$

Zum Beispiel erhält man für S_2 als einen der Hyperbelpunkte:

$$l(\overline{F_1S_2}) - l(\overline{S_2F_2}) = l(\overline{F_1S_2}) - l(\overline{S_1F_1}) = l(\overline{S_1S_2}) = 2a$$

Es ist günstig, analog zur Ellipse durch die Relation $b^2 = e^2 - a^2$ eine Größe b einzuführen. Man kann b durch eine Strecke mit der Länge b veranschaulichen:

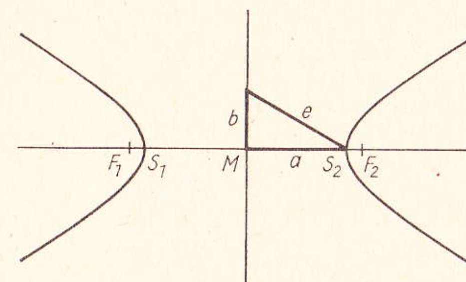


Abb. 70.2.

Dementsprechend spricht man auch bei der Hyperbel von einer Hauptachse mit der Länge $2a$ und einer Nebenachse mit der Länge $2b$.
Wir können zusammenfassen:

■ Eine Hyperbel H ist durch die Größen e und a eindeutig bestimmt, und es gilt:

$$H(e, a) = \{P \in \varepsilon |\ |l(\overline{F_1P}) - l(\overline{PF_2})| = 2a < 2e;\ F_1, F_2 \in \varepsilon \wedge l(\overline{F_1F_2}) = 2e\}$$

Aus der Definition der Hyperbel ergibt sich, wie man eine Hyperbel bei gegebenen Größen a und e punktweise konstruieren kann. Man teilt eine Strecke mit der Länge $2a$ äußerlich und erhält die Radien r_1 und r_2, mit denen man Kreise um F_1 und F_2 schlägt. Die Kreise schneiden einander im allgemeinen in vier Hyperbelpunkten. Geht man von anderen Teilungen der Strecke mit der Länge $2a$ aus, so erhält man auf gleiche Weise weitere Hyperbelpunkte.

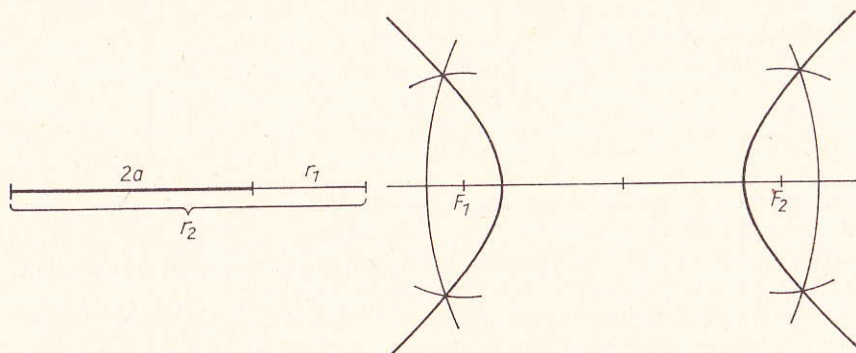


Abb. 70.3. Konstruktion von Hyperbelpunkten

70.2. Gleichung einer Hyperbel

$$|l(\overline{PF_1}) - l(\overline{PF_2})| = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

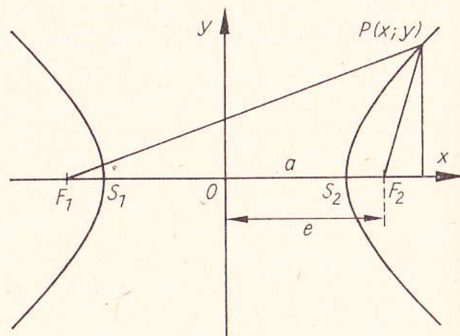


Abb. 70.4.

■ Unter Beachtung der Beziehung $e^2 = a^2 + b^2$ erhält man durch Umformung die Gleichung der Hyperbel:

■ $H(M(0;0);a;b)\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Mittelpunktslage)

■ $H(M(x_m;y_m);a;b)\colon \frac{(x-x_m)^2}{a^2} - \frac{(y-y_m)^2}{b^2} = 1$

(achsenparallele Lage)

70.3. Asymptoten einer Hyperbel

Wir wollen eine Möglichkeit kennenlernen, um Hyperbeln auf einfache Weise zu skizzieren. Dabei verwenden wir die Asymptoten der Hyperbel. Die Gleichung einer Hyperbel in achsenparalleler Mittelpunktslage lautet in expliziter Form:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Mit $y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ gilt:

$$\lim_{|x|\to\infty} y = \lim_{|x|\to\infty}\left(\pm\frac{b}{a}x\right)\cdot\lim_{|x|\to\infty}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} y = \lim_{|x|\to\infty}\left(\pm\frac{b}{a}x\right)\cdot 1$$

■ Somit sind die Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{b}{a}x$ und $y = -\frac{b}{a}x$ Asymptoten der Hyperbel in achsenparalleler Mittelpunktslage. Die Asymptoten einer Hyperbel in Mittelpunktslage sind also Geraden, die durch den Koordinatenursprung gehen und den Anstieg $m = \pm\frac{b}{a}$ haben.

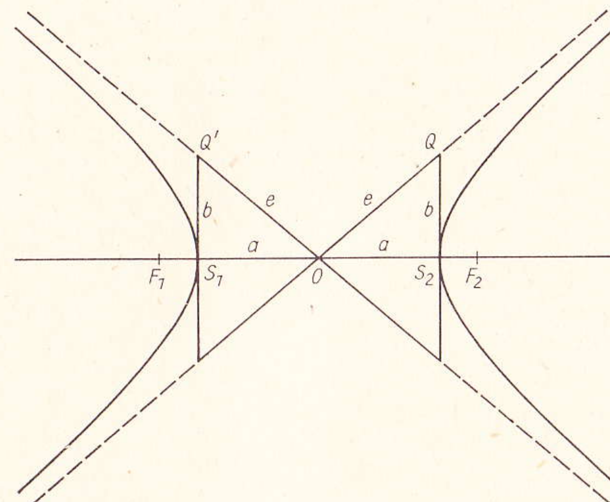


Abb. 70.5. Konstruktion von Hyperbelasymptoten

Das Dreieck OS_2Q zeigt, wie die Asymptoten konstruiert werden können, wenn zwei der drei Größen a, b und e gegeben sind.

Die Gleichungen der Asymptoten an eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$ in achsenparalleler Lage erhält man bekanntlich dadurch, daß man

in $y = \pm \frac{b}{a} x$ die Variable x durch $x - x_m$ und die Variable y durch $y - y_m$ ersetzt:

▶ $$y - y_m = \pm \frac{b}{a}(x - x_m).$$

Beim Skizzieren einer Hyperbel zeichnet man zuerst die Scheitelpunkte und die Asymptoten und schmiegt dann die Hyperbel an die Asymptoten an.

Beispiel:

Skizzieren Sie die Hyperbel mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1!$$

Lösung:

$a = 4$ und $b = 5$.

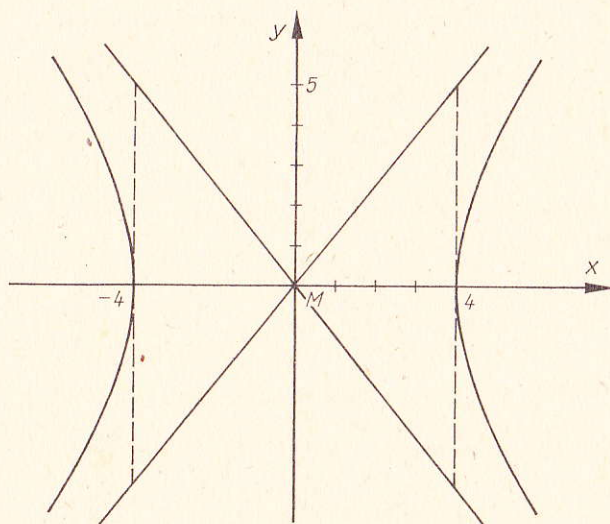


Abb. 70.6.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie ist die Hyperbel definiert?
2. Wie lautet die Definitionsgleichung einer Hyperbel?
3. Wie kann man eine Hyperbel punktweise konstruieren?
4. In welchen Schritten bestimmt man die Gleichung der Hyperbel in Mittelpunktslage?
5. Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel in Mittelpunktslage?
6. Wie erhält man die Gleichung der Hyperbel in achsenparalleler Lage aus der Gleichung der Hyperbel in Mittelpunktslage?

7. Wie heißt die Gleichung einer Hyperbel in achsenparalleler Lage?
8. Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel in Mittelpunktslage, deren Brennpunkte auf der y-Achse liegen?
9. Für welche x-Werte sind durch die Gleichungen

   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{(x - x_m)^2}{a^2} - \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$$

   y-Werte definiert?
   In welchen Intervallen liegen die y-Werte?
10. Was verstehen Sie unter der Asymptote einer Kurve?
11. Bei welchem Kegelschnitt treten Asymptoten auf?
12. Welche Gleichungen haben die Asymptoten an eine Hyperbel in Mittelpunktslage bzw. achsenparalleler Lage?

Aufgaben

1. Stellen Sie die Gleichung einer Hyperbel auf, deren Hauptachse parallel zur x-Achse ist und für die gilt:

1. $a = 1$; $b = 1$; $M(0; 0)$
2. $a = 1$; $b = 2$; $M(-3; 2)$
3. $a = 5$; $b = 4$; $M(0; 0)$
4. $a = 4$; $F_1(6; 3)$; $F_2(-4; 3)$

2. Welche Gleichung hat eine Hyperbel mit den Halbachsenlängen a und b, deren Hauptachse parallel zur y-Achse ist, wenn

1. ein Scheitelpunkt,
2. ein Brennpunkt im Koordinatenursprung liegt?

3. Gegeben ist die Ellipse mit $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Stellen Sie die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel auf, deren Scheitelpunkt sich in den Brennpunkten und deren Brennpunkte sich in den Scheitelpunkten der Ellipse befinden!

4. Es sollen die Koordinaten von vier Punkten bestimmt werden, die Eckpunkte eines Quadrates sind und auf der Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ liegen.

5. Eine Hyperbel in Mittelpunktslage geht durch den Punkt $P_0(6; -2\sqrt{2})$. Es ist $b = 2$. Wie heißt ihre Gleichung? Wie groß sind die Abstände des Punktes P_0 von den Brennpunkten?

6. Bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten der Hyperbeln!

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$
2. $\frac{(x - 4)^2}{36} - \frac{(y + 5)^2}{49} = 1$

71. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in achsenparalleler Lage

Wir haben schon gezeigt, daß Parabel, Ellipse und Hyperbel die gemeinsame Eigenschaft haben, daß sie Kegelschnitte sind. Dabei ist der Kreis ein Sonderfall der Ellipse.
Die Verwandtschaft der Kegelschnitte kommt auch bei ihrer analytischen Darstellung in Form von Gleichungen zum Ausdruck. Es gilt folgender Satz:

■ Jeder Kegelschnitt in achsenparalleler Lage kann durch eine Gleichung der Form

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

analytisch dargestellt werden.

Diese Gleichung bezeichnet man deshalb als allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in achsenparalleler Lage. Sie enthält quadratische und lineare Glieder in x und y, aber kein gemischtquadratisches Glied der Form $k \cdot xy$.
Wir zeigen zuerst, daß jeder Kegelschnitt in achsenparalleler Lage auf die Form $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ gebracht werden kann, wobei die Konstanten A, B, C, D, E reelle Zahlen sind.

Parabel

Nach oben geöffnet:

$$(x - x_s)^2 = 2p(y - y_s)$$
$$x^2 - 2xx_s + x_s^2 = 2py - 2py_s$$
$$x^2 - 2x_s x - 2py + (x_s^2 + 2py_s) = 0$$

Wir haben ein quadratisches Glied in x und lineare Glieder in x und y. Wenn wir die Gleichung noch mit A multiplizieren, ändert sich an der Abbildung nichts.

$$Ax^2 - 2Ax_s x - 2Apy + A(x_s^2 + 2py_s) = 0$$

Beachten wir, daß x_s, y_s, p und A Konstante sind, und bezeichnen wir die Koeffizienten mit den Buchstaben wie in der allgemeinen Gleichung, so erhalten wir:

$$Ax^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

Nach unten geöffnet:

Die Ausgangsgleichung enthält $-2p$, und deshalb ändern sich die Vorzeichen von $2py$ und $2py_s$. Die allgemeine Gleichung heißt aber auch in diesem Falle: $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$. Wir sehen, daß bei einer Parabel, die nach oben oder unten geöffnet ist, $B = 0$ ist.

Nach rechts geöffnet:

$$(y - y_s)^2 = 2p(x - x_s)$$
$$y^2 - 2y_s y + y_s^2 = 2px - 2px_s$$
$$y^2 - 2px - 2y_s y + (y_s^2 + 2px_s) = 0$$
$$By^2 - 2Bpx - 2By_s y + B(y_s^2 + 2px_s) = 0$$
$$By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Nach links geöffnet:

Diese Gleichung $By^2 + Cx + Dy + E = 0$ gilt auch für eine nach links geöffnete Parabel. Bei einer Parabel, die nach rechts oder links geöffnet ist, ist in der allgemeinen Gleichung $A = 0$.

Ellipse

$$\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$$
$$b^2(x^2 - 2x_m x + x_m^2) + a^2(y^2 - 2y_m y + y_m^2) = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - 2b^2x_m x + b^2x_m^2 + a^2y^2 - 2a^2y_m y + a^2y_m^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_m x - 2a^2y_m y + (b^2x_m^2 + a^2y_m^2 - a^2b^2) = 0$$
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Wir sehen, daß bei einer Ellipse A und B immer das gleiche Vorzeichen haben; denn stets sind $b^2 > 0$ und $a^2 > 0$. Multipliziert man die Gleichung mit einer negativen Zahl, dann werden A und B negativ, haben also auch wieder das gleiche Vorzeichen.
Die Gleichung der Ellipse wird für $a = b = r$ zur Kreisgleichung. Dann gilt aber auch $A = B$. Somit wird auch an der allgemeinen Gleichung erkennbar, daß der Kreis ein Sonderfall der Ellipse ist. A und B haben bei einem Kreis nicht nur gleiche Vorzeichen wie bei einer Ellipse, sondern auch den gleichen Betrag.

Hyperbel

$$\frac{(x - x_m)^2}{a^2} - \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$$
$$b^2x^2 - 2b^2x_m x + b^2x_m^2 - a^2y^2 + 2a^2y_m y - a^2y_m^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_m x + 2a^2y_m y + (b^2x_m^2 - a^2y_m^2 - a^2b^2) = 0$$
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Bei einer Hyperbel haben A und B in der allgemeinen Gleichung immer verschiedene Vorzeichen.
Fassen wir die Erkenntnisse zusammen:
Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts in achsenparalleler Lage ist $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Diese Gleichung ist die analytische Darstellung einer

■ Ellipse, wenn $A \cdot B > 0$ ist (Sonderfall: Kreis $A = B$),
Hyperbel, wenn $A \cdot B < 0$ ist,
Parabel, wenn $A \cdot B = 0$ ist, ohne daß A und B beide Null sind.

Mit anderen Worten: Ein Kegelschnitt ist ein Mittelpunktskegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel), wenn A und B ungleich 0 sind. Bei einer Parabel gibt es dagegen nur ein quadratisches Glied, und die andere Variable tritt linear auf. Wenn $B = 0$ ist, so ist $A \neq 0$, und es ist $D \neq 0$. Wenn $A = 0$ ist, so $B \neq 0$, und es ist $C \neq 0$.
Wenn ein Kegelschnitt in der Form der allgemeinen Gleichung gegeben ist, kann man aus A und B sofort erkennen, was für ein Kegelschnitt es ist. Außerdem kann man die Kegelschnittsgleichung so umformen, daß man die Halbachsenlängen a, b bzw. den Parameter $2p$ und die Mittelpunktskoordinaten x_m, y_m bzw. die Scheitelpunktskoordinaten x_s, y_s ablesen kann.

Beispiele:

■ (1) gegeben: Kegelschnitt mit der Gleichung $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$
Da $A = B$ ist, ist der Kegelschnitt ein Kreis. Wir wollen die Gleichung auf die Form $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$ bringen.
Das erfolgt in folgenden Schritten:
Wir *ordnen* die quadratischen und linearen Glieder *nach der gleichen Variablen*:

$x^2 + 6x + y^2 - 4y = 3$

Wir *addieren* auf beiden Seiten die *quadratischen Ergänzungen*:

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 3 + 9 + 4$

Wir schreiben vollständige Quadrate:

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$

Der Kreis hat den Radius $r = 4$ und den Mittelpunkt $M(-3; 2)$.

■ (2) gegeben: Kegelschnitt mit der Gleichung

$9x^2 + 25y^2 + 72x - 50y - 56 = 0$

Da $A \cdot B > 0$ und $A \neq B$ sind, ist der Kegelschnitt eine Ellipse.

Wir wollen ihn auf die Form $\dfrac{(x - x_m)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$ bringen.

Wir *ordnen*:

$9x^2 + 72x + 25y^2 - 50y = 56$

Wir *klammern* die Koeffizienten der quadratischen Glieder beim quadratischen und linearen Glied der gleichen Variablen *aus*.

$9(x^2 + 8x) + 25(y^2 - 2y) = 56$
$9(x^2 + 8x + 16) + 25(y^2 - 2y + 1) = 56 + 144 + 25$

Wir beachten, daß wir die *quadratische Ergänzung mit* dem ausgeklammerten *Faktor multiplizieren* müssen, wenn wir sie *rechts* addieren.

Den *Faktor A* kann man auch als *Divisor* $\dfrac{1}{A}$ schreiben.

$$\frac{(x + 4)^2}{\frac{1}{9}} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{1}{25}} = 225$$

Man muß die Gleichung noch durch die Zahl auf der rechten Seite dividieren, um *rechts 1* zu erhalten.

$$\frac{(x + 4)^2}{\frac{225}{9}} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{225}{25}} = 1$$

$$\frac{(x + 4)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$$

Die Ellipse hat den Mittelpunkt $M(-4; 1)$ und die Halbachsenlängen $a = 5$ und $b = 3$.

■ (3) gegeben: Kegelschnitt mit der Gleichung $y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$
Da $A \cdot B = 0$, ist der Kegelschnitt eine Parabel. $B \neq 0$ bedeutet, daß die Parabel nach rechts oder links geöffnet ist.

Ziel: $(y - y_s)^2 = 2p(x - x_s)$ oder $(y - y_s)^2 = -2p(x - x_s)$
$y^2 + 6y = 4x - 3$
$y^2 + 6y + 9 = 4x - 3 + 9$
$(y + 3)^2 = 4\left(x + \dfrac{6}{4}\right)$

Die Parabel ist nach rechts geöffnet, hat den Parameter $2p = 4$ und den Scheitelpunkt $S(-1,5; -3)$.

Übungen und Aufgaben

Kontrollfragen

1. Wie heißt die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in achsenparalleler Lage?
2. Was für ein Kegelschnitt ist es, wenn in der allgemeinen Gleichung
   1. A und B gleiche Vorzeichen haben,
   2. A und B verschiedene Vorzeichen haben,
   3. entweder A oder B gleich Null sind?
3. Wieso zeigt sich an der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte, daß der Kreis ein Sonderfall der Ellipse ist?
4. Welche Kegelschnitte sind Mittelpunktskegelschnitte?
5. Wie erkennt man einen Mittelpunktskegelschnitt an der allgemeinen Gleichung?
6. In welchen Schritten formt man die allgemeine Gleichung einer Ellipse um, damit man die Form

$$\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$$

erhält?

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Art des Kegelschnitts! Geben Sie den Mittelpunkt und die Halbachsenlängen bzw. den Scheitelpunkt und den Parameter an!

1. $16x^2 + 25y^2 - 96x + 100y - 156 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 16y = 0$
3. $10x^2 - 10y^2 - 20x + 20y - 10 = 0$
4. $y^2 + x - y - 3 = 0$

2. Lesen Sie die Definition der Kegelschnitte!

$k(M; r) = \{P \in \varepsilon \mid l(\overline{PM}) = r;\ M \in \varepsilon\}$

► Der Kreis um M mit dem Radius r ist die Menge aller Punkte einer Ebene ε, für die der Abstand von M gleich r ist, wobei M in der Ebene ε liegt.

1. $E(e; a) = \{P \in \varepsilon \mid l(\overline{F_1P}) + l(\overline{PF_2}) = 2a > 2e;$
   $F_1, F_2 \in \varepsilon \wedge l(\overline{F_1F_2}) = 2e\}$
2. $H(e; a) = \{P \in \varepsilon \mid |l(\overline{F_1P}) - l(\overline{PF_2})| = 2a < 2e;$
   $F_1, F_2 \in \varepsilon \wedge l(\overline{F_1F_2}) = 2e\}$
3. $P_a(p) \ = \{P \in \varepsilon \mid a(P, l) = l(\overline{PF});\ F \in \varepsilon \wedge l \subset \varepsilon \wedge a(l, F) = p\}$

3. werden für ... zu ...

... / Kreisgleichung

► Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in achsenparalleler Lage wird für $A = B$ zur Kreisgleichung.

1. ... / Ellipsengleichung
2. ... / Hyperbelgleichung
3. .. / Parabelgleichung